DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN

"VALIDACION EXPERIMENTAL DE CONTROLADORES MULTI-AGENTES TIPO QUAD-ROTOR"

POR

ING. JULIO CESAR RODRIGUEZ CERVANTES

T E S I S

PRESENTADO COMO REQUISITO PARCIAL PARA OBTENER EL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS EN INGENIERÍA ELÉCTRICA

DIRECTORES DE TESIS
Dr. Alejando Enrique Dzul López
Dr. Héctor Ríos Barajas

ISSN: 0188-9060

RIITEC(10) -TMCIE - 2023
Torreón, Coahuila. México
Agosto 2023

Torreón, Coahuila, 4/AGOSTO/2023
Circular No. DEPI/282/2023
Asunto: Se autoriza Impresión de Tesis

C. JULIO CESAR RODRIGUEZ CERVANTES
CANDIDATO AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS
EN INGENIERÍA ELÉCTRICA
PRESENTE.-

Después de haber sometido a revisión su trabajo de tesis titulado:

"Validación experimental de controladores multi-agentes tipo Quad-Rotor

Habiendo cumplido con todas las indicaciones que el jurado revisor de tesis hizo, se le comunica que se le concede la autorización con el número de registro ***RIITEC (10) – TMCIE-2023***, para que proceda a la impresión del mismo.

EDUCACIÓN
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA
TECNOLÓGICO NACIONAL DE MÉXICO
INSTITUTO TECNOLOGICO DE LA LAGUNA
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN

A T E N T A M E N T E
Educación Tecnológica, Fuente de Innovación.
Excelencia en Educación Tecnológica®

JOSÉ IRVING HERNÁNDEZ JÁCQUEZ
JEFE DE LA DIV. EST. POSG. E INVEST.

c.c.p. Expediente
JIHJ/*mjsl

Torreón, Coahuila, 02/AGOSTO /2023
ASUNTO: Autorización de Impresión

JOSÉ IRVING HERNÁNDEZ JÁCQUEZ
JEFE DE LA DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN

Por medio de la presente, hacemos de su conocimiento que después de haber sometido a revisión el trabajo de tesis titulado:

"Validación experimental de controladores multi-agentes tipo Quad-Rotor"

Desarrollo por el ***C. Julio César Rodríguez Cervantes,*** con número de control ***M21130017***, y habiendo cumplido con todas las correcciones que se le indicaron, estamos de acuerdo que se le conceda la autorización de la fecha de examen de grado para que proceda a la impresión de la misma.

A T E N T A M E N T E
Excelencia en Educación Tecnológica®
Educación Tecnológica Fuente de Innovación

Alejandro Enrique Dzul López
Asesor(a)/Director(a) de Tesis

Héctor Ríos Barajas
CoAsesor(a) Codirector(a) de Tesis

Víctor Adrian Santibáñez Dávila
Comité Tutorial

Miguel Ángel Llama Leal
Comité Tutorial

El comité tutorial de este trabajo está conformado por:

Presidente: Dr. Alejandro Enrique Dzul López

Secretario: Dr. Héctor Ríos Barajas

Vocal: Dr. Víctor Adrian Santibáñez Dávila

Vocal Suplente: Dr. Miguel Ángel Llama Leal

NOTA SOBRE ESTA VERSIÓN CORREGIDA (2026)

Esta versión corrige errores tipográficos y de datos encontrados en 2026 en el documento entregado en agosto de 2023, verificados contra el firmware de vuelo, las referencias citadas y los datos de los experimentos y simulaciones. El contenido, los resultados y la numeración no cambian, salvo en los puntos siguientes:

- Ecs. (1) y (4): la tercera componente de $\boldsymbol{w}_{\eta i}$ es $\dot{\phi}_i\dot{\theta}_i$; $\boldsymbol{\tau}_i$ es el vector de torques (no de momento angular).
- Definición 3: aristas y etiquetas se definen para $i \neq j$. Definición 2: la entrada del sistema (3) se denota u y la propiedad FT-ISS se refiere al sistema (3).
- Suposición 4: las condiciones de Lipschitz aplican a $\dot{d}_\phi$, $\dot{d}_\theta$ y $\dot{d}_\psi$.
- Ec. (8b): $\nu_{yi} = u_{mi}(\cos\phi_{\star i}\,\mathrm{sen}\,\theta_{\star i}\,\mathrm{sen}\,\psi_{di} - \mathrm{sen}\,\phi_{\star i}\cos\psi_{di})$; Ec. (8c): $\nu_{zi} = u_{mi}\cos\phi_{\star i}\cos\theta_{\star i} - g$.
- Ec. (17), MDNST: $s_{1i} = e_{1i} + k_{10i}\lceil\varepsilon_{1i}\rfloor^{3/2}$. Tablas 2 y 3: $k_{11i} \propto \zeta^{1/2}$ y $k_{12i} \propto \zeta$ (TC), $k_{12i} \propto \zeta$ (MDNST), como en la implementación.
- Ec. (18): la trayectoria deseada es $z_d = 1 + \tanh(t-5) - 2.5$.
- Ec. (19): límite superior de la integral t e integrando $\|f(\sigma)\|^2$.
- Tablas 4 y 5 recalculadas a partir de los datos de simulación (p. ej., e_z de MDNST $= 8.484 \times 10^{-4}$ y e_ψ de MDST $= 1.143 \times 10^{-8}$). Tablas 19, 22 y 23 recalculadas a partir de los datos experimentales (las Tablas 19 y 22 repetían los valores de las Tablas 11 y 21).
- Conclusiones: de acuerdo con los datos de las Tablas 8–23, los controladores con mejor rendimiento son el ST (menores errores de posición y guiñada) y el PID (menor esfuerzo de control), en concordancia con el Capítulo 4; la versión entregada mencionaba al MDST.
- Las Tablas 16–19 corresponden al agente R_2; la Tabla 22 corresponde a $\tau_{\theta 2}$; el controlador de posición es (10a), (11).

Además, se agrega el Apéndice B con el análisis de estabilidad completo del Teorema 1, como material complementario escrito en 2026 que no forma parte de la tesis defendida.

Debemos luchar para que cada mujer y cada hombre tengan la oportunidad de vivir vidas sanas y seguras, con oportunidades y amor. Todos somos viajeros en el tiempo, viajamos juntos hacia el futuro. Trabajemos unidos para construir ese futuro, un lugar que nos guste visitar. Seamos valientes, curiosos, decididos, superemos las dificultades. Se puede conseguir.

– Stephen Hawking

Dedicado a todas las personas que han estado a mi lado durante este proceso, brindándome su apoyo directamente o indirectamente. Quisiera destacar especialmente a mi madre, *Patricia*, y a mi novia, *Jessica*, quienes han sido fundamentales en esta etapa de mi vida. Agradezco sinceramente su íncondicional apoyo y amor.

AGRADECIMIENTOS

A mis padres *Patricia Cervantes Pérez* y *Eduardo José Rodríguez González*, por el apoyo que me han brindado. A mis hermanos *Eduardo, Perla y Pedro*, por su apoyo.

A mis compañeros de laboratorio *Ing. Servando Encina*, *Ing. Jimmy Cruz*, *M.C. Ariana Gutiérrez*, *Dr. Romeo Falcón*, *Dr. Jorge Villalobos Chin*, *M.C. Emanuel*, *Ing. Aldo Osuna*, *Ing. Hector Javier López*, *Ing. Brandon Dariel*, e *Ing. Juan Carlos Hernández*, con quienes pasé momentos increíbles.

A mi asesor el *Dr. Alejandro Enrique Dzul López*, por su paciencia, confianza, todos los conocimientos brindados y por toda la ayuda en la realización de este trabajo; a mi co-asesor *Dr. Héctor Ríos Barajas*, por su ayuda y todo el conocimiento brindado en este trabajo. Ambos fueron parte fundamental en esta etapa.

A todos los doctores que conforman el posgrado del Instituto, por brindarme el conocimiento necesario para el desarrollo de este trabajo, especialmente al *Dr. Miguel Angel Llama Leal* y al *Dr. Víctor Santibáñez Dávila* por su participación en la elaboración del mismo.

A CONAHCYT por el apoyo financiero brindado para mis estudios de maestría, con número de CVU 1155764, los cuales culminaron con la presentación de esta Tesis.

RESUMEN

Este documento de tesis proporciona los resultados de simulación y la validación experimental de la implementación de controladores robustos en sistemas multi-agente del tipo Quad-Rotor, con el fin de garantizar una formación deseada. Los controladores presentados se basan en leyes de control robustas por Modos Deslizantes continuos, PID, así como teoría de grafos, considerando perturbaciones externas. Los controladores son implementados con ayuda del software ROS (por sus siglas en inglés de *Robot Operating System*), en los nano Quad-Rotors Crazyflie.

Los controladores simulados y validados experimentalmente son: PID, Twisting Continuo (TC), Super-Twisting (ST), Modos Deslizantes No Singular Terminal (MDNST), Modos Deslizantes Singular Terminal (MDST).

Finalmente, los resultados experimentales son evaluados con un índice de desempeño para conocer cúal de ellos presenta el mejor desempeño en tareas de formación.

ABSTRACT

This thesis report provides the numerical simulations and experimental results of robust controllers applied to a multi-agent system. Such a multi-agent system is composed of Quad-Rotor vehicles and the control objective consists to maintain a formation structure. The designed controllers are based on PIDs (Proportional-Integral-Derivative controllers) and robust control laws, including Continuous Sliding Modes, and graph theory; the dynamics model considers external disturbances. The controllers are implemented using the Robot Operating System (ROS) software on Crazyflie nano Quad-Rotors.

Numerical simulations and experimental results are obtained for the: PID, Continuous Twisting (TC), Super-Twisting Algorithm (ST), Nosingular Terminal Sliding Mode Control (MDNST), and Singular Terminal Sliding Mode Control (MDST).

Finally, the experimental results are analized by using a performance index average in order to determine which controller presents the best formation performance.

ÍNDICE GENERAL

1 Introducción 1
- 1.1 Motivación . . . 1
- 1.2 Planteamiento del problema . . . 3
- 1.3 Estado del Arte . . . 4
- 1.4 Contribución . . . 6
- 1.5 Organización de la tesis . . . 7

2 Preliminares 9
- 2.1 Notación: . . . 9
- 2.2 Definiciones . . . 9

3 Control de formación en multi-Quad-Rotors 11
- 3.1 Modelado de un grupo de Quad-Rotors . . . 11
- 3.2 Estrategia de control . . . 12
  - 3.2.1 Observador por modos deslizantes en tiempo finito (FT-SMO) . . . 12
  - 3.2.2 Diseño de controladores . . . 14

4 Resultados de simulación y experimentales. 21
- 4.1 Resultados de simulación . . . 21
- 4.2 Resultados experimentales . . . 22
  - 4.2.1 Plataforma Experimental . . . 23
  - 4.2.2 Validación Experimental . . . 25

5 Conclusiones 37

A Plataforma Multi-Quad-Rotor 39
- A.1 RPM a Newtons . . . 47

B Análisis de estabilidad (material complementario, 2026) 49
- B.1 Alcance y correcciones . . . 49
- B.2 Modelo, notación y suposiciones permanentes . . . 49
- B.3 Observador y lazo cerrado para $t \geqslant T_0$ . . . 51
- B.4 Lazo de posición . . . 52
- B.5 Lazo de orientación . . . 53
- B.6 Resultado principal . . . 55
- B.7 Lo que no se demuestra . . . 56

Bibliografía 57

1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo se aborda la motivación del trabajo, que constituye la base del planteamiento del problema. Se incluye también una revisión del estado del arte, mostrando, de manera resumida, algunos estudios previos que han tratado el problema de control de formación en un sistema multi-agente. Además, se expone la contribución que este trabajo ofrece para resolver la problemática planteada, así como su organización.

1.1 MOTIVACIÓN

Los vehículos aéreos no tripulados (UAVs, por sus siglas en inglés de *Unmanned Aerial Vehicles*) han tenido en las últimas dos décadas un auge importante debido a la gran variedad de aplicaciones en distintas áreas. Por ejemplo, algunas de estas aplicaciones incluyen el mapeo y la localización [1], la vigilancia de objetivos [2], la búsqueda y rescate [3], la agricultura inteligente [4] y el transporte cooperativo [5].

Los UAVs, se clasifican en varias categorías según su tamaño, alcance y propósito. Los UAVs de ala fija poseen una estructura similar a la de los aviones convencionales y se utilizan generalmente para aplicaciones de largo alcance, como la vigilancia de áreas extensas. Los UAVs de ala rotatoria, como los Quad-Rotors, son más versátiles y adecuados para tareas de corto alcance, como inspecciones, transporte de objetos, entre otros.

Existe un gran interés en el uso de Quad-Rotors, debido a su diseño compacto, facilidad de manejo, capacidad de vuelo vertical, así como de vuelo estacionario, haciéndolos ideales para aplicaciones en espacios reducidos.

Esto los convierte en una herramienta valiosa para inspecciones de infraestructuras, mapeo de terrenos, etc. Por otro lado, su reducido costo, en comparación con otros UAVs de ala fija o híbridos, así como su dinámica no lineal, los convierte en una opción atractiva para diversos aspectos de investigación.

Una de las áreas de estudio que ha tomado relevancia es la relacionada a la cooperación de múltiples vehículos. Un sistema multi-agente está conformado por dos o más elementos. Los sistemas multi-agente son capaces de realizar muchas tareas que no podrían ser realizadas de manera más efectiva por un sólo agente (robot). Este tipo de sistemas puede reducir el costo, desde la plataforma de hardware hasta el software, es decir, un agente grande y costoso puede ser reemplazado por varios agentes pequeños y económicos para implementar tareas, aunque con una mayor complejidad del algoritmo.

Entre las diferentes tareas colaborativas que puede realizar un sistema multi-agente, existe una que trata sobre la formación que ejecuta el grupo de agentes, es decir, la coordinación de los movimientos de estos. La formación es muy importante dado que el posicionamiento elegido entre los agentes (patrón geométrico), influye en la capacidad o no de realizar la tarea deseada, o en la eficacia que pueda tener el sistema multi-agente para desarrollar dicha tarea.

El diseño de controladores de formación presenta un desafío debido a la necesidad de coordinar y controlar eficientemente un grupo de agentes, considerando también la capacidad de lidiar con perturbaciones externas. Para lograrlo, es crucial considerar factores como el adecuado modelado del sistema multi-agentes, la comunicación entre ellos y el hardware necesario para su funcionamiento. Una limitada comunicación entre agentes puede reducir la capacidad de los controladores para obtener la información requerida, por lo que es importante optimizar la cantidad mínima de información necesaria para cada agente. Para abordar este problema, el uso de observadores se vuelve fundamental, ya que permiten estimar la información relevante dependiendo de la topología de formación seleccionada. Al emplear estos enfoques y desarrollar controladores robustos capaces de lidiar con perturbaciones externas, se podrá mejorar la eficiencia y precisión de los controladores de formación para sistemas multi-agentes. Esto es esencial para avanzar hacia sistemas autónomos y colaborativos que puedan operar de manera efectiva en entornos complejos. Por estos motivos es importante considerar el problema de formación.

En la Figura 1, se muestran distintos tipos de tareas ejecutadas por un sistema multi-agente basado en Quad-Rotors.



(a) Reconocimiento (b) Mapeo de áreas

(c) Transporte (d) Espectáculo

Figura 1: Tareas con multi-agentes.

1.2 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Las ecuaciones que describen la dinámica de un grupo de n Quad-Rotors están dadas por (ver Figura 2, y para detalles del modelado ver [6]):

$$\dot{\boldsymbol{\xi}}_{1i} = \boldsymbol{\xi}_{2i}, \tag{1a}$$

$$\dot{\boldsymbol{\xi}}_{2i} = \mathbf{g}_{\xi i}(\boldsymbol{\eta}_{1i})u_{mi} - \mathbf{G}_i - \boldsymbol{\Lambda}_{\xi i}\boldsymbol{\xi}_{2i} + \mathbf{d}_{\xi i}, \tag{1b}$$

$$\dot{\boldsymbol{\eta}}_{1i} = \boldsymbol{\eta}_{2i}, \tag{1c}$$

$$\dot{\boldsymbol{\eta}}_{2i} = \mathbf{J}_i\boldsymbol{\tau}_i + \boldsymbol{\Xi}_i\boldsymbol{w}_{\eta i}(\boldsymbol{\eta}_{2i}) - \boldsymbol{\Lambda}_{\eta i}\boldsymbol{\eta}_{2i} + \mathbf{d}_{\eta i}, \tag{1d}$$

con $i = \overline{1,n}$, donde $\boldsymbol{\xi}_{1i} := [x_i \quad y_i \quad z_i]^\top \in \mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{\xi}_{2i} := [\dot{x}_i \quad \dot{y}_i \quad \dot{z}_i]^\top \in \mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{\eta}_{1i} := [\phi_i \quad \theta_i \quad \psi_i]^\top \in \mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{\eta}_{2i} := [\dot{\phi}_i \quad \dot{\theta}_i, \dot{\psi}_i]^\top \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{d}_{\xi_i} := [d_{x_i} \quad d_{y_i} \quad d_{z_i}]^\top \in \mathbb{R}^3$ y $\mathbf{d}_{\eta_i} := [d_{\phi_i} \quad d_{\theta_i} \quad d_{\psi_i}]^\top \in \mathbb{R}^3$. Los términos $x_i, y_i \in \mathbb{R}$ denotan las coordenadas en el plano horizontal, $z_i \in \mathbb{R}$ describe la posición vertical; ϕ_i, θ_i y $\psi_i \in \mathbb{R}$ representan los ángulos de inclinación alrededor del eje X (alabeo), el eje Y (cabeceo), y el eje Z (guiñada), respectivamente. Por otro lado, $\mathbf{G}_i := [0 \quad 0 \quad g]^\top \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{J}_i := \text{diag}(J_{xi}^{-1}, J_{yi}^{-1}, J_{zi}^{-1}) \in \mathbb{R}^{3\times3}$ y $\boldsymbol{\tau}_i := [\tau_{\phi_i} \quad \tau_{\theta_i} \quad \tau_{\psi_i}]^\top \in \mathbb{R}^3$, corresponden al vector de gravedad, a la matriz de inercia, y al vector de torques, con g como la aceleración gravitacional, J_{x_i}, J_{y_i} y J_{z_i} como los momentos de inercia en los ejes X, Y y Z, mientras que τ_{ϕ_i}, τ_{θ_i} y $\tau_{\psi_i} \in \mathbb{R}$ son los torques de alabeo, cabeceo y guiñada, respectivamente. El término $u_{m_i} := u_i/m_i$, donde $u_i \in \mathbb{R}$, representa el empuje en

Z y $m_i \in \mathbb{R}^+$ representa la masa de cada Quad-Rotor. Las matrices $\Lambda_{\xi i} := \text{diag}\,(a_{xi}, a_{yi}, a_{zi}) \in \mathbb{R}^{3\times3}$, $\Lambda_{\eta i} := \text{diag}\,(a_{\phi i}, a_{\theta i}, a_{\psi i}) \in \mathbb{R}^{3\times3}$ y $\Xi i := \text{diag}\,(b_{\phi i}, b_{\theta i}, b_{\psi i}) \in \mathbb{R}^{3\times3}$, están dadas por los coeficientes de amortiguación aerodinámicos a_{xi}, a_{yi} y a_{zi}, los coeficientes de resistencia rotacional de momento $a_{\phi i}$, $a_{\theta i}$ y $a_{\psi i}$, y los coeficientes de inercia $b_{\phi i} := (J_{yi} - J_{zi})/J_{xi}$, $b_{\theta i} := (J_{zi} - J_{xi})/J_{yi}$ y $b_{\psi i} := (J_{xi} - J_{yi})/J_{zi}$. Las funciones $g_{\xi i} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ y $w_{\eta i} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ se definen de la siguiente manera: $g_{\xi i}(\eta_1 i) := [\cos\phi_i \,\text{sen}\,\theta_i \cos\psi_i + \text{sen}\,\phi_i \,\text{sen}\,\psi_i \quad \cos\phi_i \,\text{sen}\,\theta_i \,\text{sen}\,\psi_i - \text{sen}\,\phi_i \cos\psi_i \quad \cos\phi_i \cos\theta_i]^\top$ y $w_{\eta i}(\eta_{2i}) := [\dot\theta_i\dot\psi_i \quad \dot\phi_i\dot\psi_i \quad \dot\phi_i\dot\theta_i]^\top$. Los términos d_x, d_y, d_z, d_{ϕ_i}, d_{θ_i} y $d_{\psi_i} \in \mathbb{R}$ representan las perturbaciones dadas por incertidumbres y perturbaciones externas, *e.g.*, algunas dinámicas no modeladas y ráfagas de viento.

Este trabajo de tesis tiene como objetivo resolver el problema de formación para un sistema de multi-Quad-Rotors utilizando un esquema de formación centrado en el líder.

En los sistemas multi-agentes con formación centrada en el líder, un agente específico, es designado como líder, y es el único capaz de conocer la trayectoria deseada. A partir de la posición del agente líder se determina la formación de los demás agentes del sistema. El principal desafío que se presenta es la coordinación y el control de los agentes seguidores.

Para lograrlo, se empleará una combinación de Modos Deslizantes Continuos y controladores PIDs.

Además, se realiza un análisis comparativo entre los diferentes controladores, utilizando resultados de simulación y experimentales, con el propósito de identificar el esquema de control que presenta el mejor desempeño.

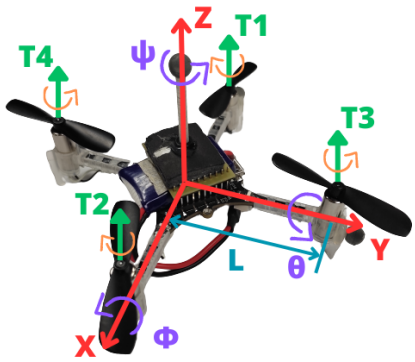


Figura 2: Nano Quad-Rotor crazyflie

1.3 ESTADO DEL ARTE

En las últimas décadas, el estudio del control cooperativo y control de formación de multi-agentes ha experimentado un crecimiento significativo debido a la necesidad de abordar tareas complejas en diversos campos, como la logística, la exploración de áreas inaccesibles y la vigilancia, entre otras.

Por ejemplo, en [7], se propuso un método para rastrear múltiples Quad-Rotors que vuelan en formación en interiores. En [8], se propone un esquema de control de formación-contención para un conjunto de micro Quad-Rotors en el cual se emplea un modo deslizante adaptativo. El sistema multi-agente propuesto se compone de un líder virtual y un conjunto de líderes y seguidores modelados, donde el líder virtual establece la trayectoria del grupo de micro Quad-Rotors. La propuesta consta de dos capas para resolver el problema de contención; en la primera capa, los líderes logran una formación variable en el tiempo con respecto al líder virtual, y luego los seguidores convergen a un casco convexo generado por los líderes.

En [9], se considera un control de formación que posee estabilidad en tiempo fijo para un grupo de Quad-Rotors que transportan, cooperativamente, una carga suspendida bajo un esquema líder-seguidor. Dicho esquema de control incluye un observador para compensar las perturbaciones que afectan la dinámica de posición.

En [10], se desarrolla un algoritmo de vuelo bioinspirado, el cual utiliza apredizaje por refuerzo para controlador un grupo de Quad-Rotors de manera similar a como lo hacen los animales. A diferencia de los controladores convencionales como PID se basa en la idea de que los animales aprenden a controlar sus movimientos a través de la prueba y error, utilizando sus capacidades máximas de manera optimizada.

En [11], se presenta una estrategia de control de formación para múltiples UAV's, de tipo Quad-Rotor, utilizando un enfoque de Control Predictivo Modelado multi-restringido. Esta estrategia combina el filtro Kalman-consensus y un observador de perturbaciones de tiempo fijo para lograr un control de formación estable y robusto en entornos complejos.

En [12], se presenta un control de consenso robusto de un sistema multi-agente líder-seguidor, sujeto a fallas de comunicación, garantizando la convergencia de las trayectorias de los agentes hacia un agente líder cuando todos los seguidores están experimentando fallas en el intercambio de información.

En [13], se introducen nuevas condiciones para el consenso y la estabilización de sistemas multiagentes mediante el uso de protocolos de retroalimentación dinámica de salida.

En [14], se propone una metodología de control adaptativo y robusta para el transporte cooperativo de carga en sistemas de UAVs en red, que se basa en el seguimiento de formación y ofrece una solución eficiente y simplificada para el problema, demostrada mediante simulaciones y experimentos en laboratorio.

En [15], se propone un controlador geométrico para la transferencia de una carga utilizando Quad-Rotors. En [16], se aborda el diseño de un controlador robusto para un conjunto de Quad-Rotors que forman un patrón geométrico. La estrategia de control propuesta se basa en técnicas de modos deslizantes en presencia de una clase de perturbaciones.

en [17], aborda el control de formación de agentes con perturbaciones desconocidas, considerando dos casos diferentes: uno donde los agentes

miden desplazamientos relativos y otro donde un agente mide su posición en un sistema global.

En [18], se introduce un enfoque de control basado en el Rechazo Activo de Perturbaciones para el control cooperativo de formación de un conjunto de UAVs. La estrategia se centra en la estimación de perturbaciones con el objetivo de optimizar la eficiencia y precisión de la formación de UAVs. El método planteado utiliza observadores para evaluar las perturbaciones no lineales y un control de retroalimentación fundamentado en estas estimaciones para aumentar la resistencia frente a las perturbaciones. Si bien este estudio no incluye una validación experimental, los resultados de simulación evidencian una mejora en el rendimiento de la formación de los UAVs.

En [19], se aborda el problema formación de varios UAVs. Se propone una técnica de control cooperativo que emplea redes neuronales para incrementar la precisión y estabilidad de un control PID. Para acelerar la velocidad de convergencia de la red neuronal, se añaden términos de impulso y factores de gradiente. Los resultados de la simulación indican que el algoritmo propuesto optimiza la eficiencia de convergencia y demuestra una cierta robustez.

En [20], presenta un algoritmo de control de dos capas para grupos de UAVs que aborda el seguimiento de trayectorias y evita colisiones en presencia de perturbaciones desconocidas. Utilizando técnicas de control distribuido y observador de estado, se garantiza la seguridad de los UAVs mientras siguen sus trayectorias deseadas.

En [21], se propone un controlador robusto para el transporte de un objeto por medio de dos UAVs, a través de una red neuronal, además, se incorpora un observador para estimar y compensar las perturbaciones, reforzando la robustez del controlador. Los resultados se limitan a la simulación. En [22], se sugiere un controlador de formación robusto que tiene en cuenta las perturbaciones y el retraso de tiempo en la red de comunicación del sistema.

En [23], se presenta un control de formación para un patrón geométrico variante en el tiempo. Los autores emplean una estrategia de control en cascada (orientación-posición) basada en modos deslizantes. El diseño del controlador utiliza una linealización de los controladores virtuales, los cuales generan las señales de referencia correspondientes al alabeo, al cabeceo y al empuje total. Por otro lado, en [24], se presenta el seguimiento de trayectorias en un Quad-Rotor, empleando también una estrategia de control en cascada por modos deslizantes; en este caso, en el diseño del controlador no se utiliza una linealización de los controladores virtuales. Esto implica que el resultado en [23] es local, *i.e.*, para ángulos pequeños, mientras que en [24] no se presenta dicha restricción.

1.4 CONTRIBUCIÓN

Motivados por los recientes avances en el campo, este trabajo de tesis amplía la propuesta planteada en [24], con el objetivo de abordar problemas

de formación centrados en el líder. La principal contribución del trabajo radica en la implementación experimental de dicho esquema de formación y el desarrollo de una plataforma para multi-Quad-Rotors. Para abordar el problema, se consideraron controladores robustos para la formación de Quad-Rotors utilizando controladores PID, y controladores por modos deslizantes continuos, tales como Super-Twisting [25], Twisting Continuo [26], Modos Deslizantes Singular Terminal [27] y Modo Deslizantes No Singular Terminal [28].

1.5 ORGANIZACIÓN DE LA TESIS

El resto del documento tiene la siguiente estructura. En el Capítulo 2, se presentan algunos preliminares matemáticos necesarios para el desarrollo de este trabajo. En el Capítulo 3, se presenta el modelado de un grupo de Quad-Rotors, así como el diseño de los controladores robustos; se incluye el diseño de observadores, necesarios para la consideración de las perturbaciones externas. Los resultados de simulación y experimentales son mostrados en el Capítulo 4. Las conclusiones finales se encuentran en el Capítulo 5.

2

PRELIMINARES

2.1 NOTACIÓN:

$0_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $I_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$ denotan las matrices de cero e identidad de dimensión n, respectivamente; $\mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} : x \geqslant 0\}$ denota el conjunto de todos los números reales no negativos. Para una función medible de Lebesgue $d : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^m$, se define la norma $\|d\|_{[t_0,t_1)} = \text{esssup}_{t\in[t_0,t_1)} \|d(t)\|$, entonces $\|d\|_f = \|d\|_{[t_f,+\infty)}$ y $\|d\|_\infty = \|d\|_{[0,+\infty)}$; El conjunto de $d(t)$ con la propiedad $\|d\|_\infty < +\infty$ se denota como $\mathcal{L}_\infty$; y $\mathcal{L}_D = \{d \in \mathcal{L}_\infty : \|d\|_\infty \leqslant D\}$, para cualquier $D > 0$. Una secuencia de números enteros $1, \ldots, n$ se denota como $\overline{1,n}$. La función $\lceil s \rfloor^\beta := |s|^\beta \operatorname{sign}(s)$, para cualquier $s \in \mathbb{R}$ y $\beta \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$, y $\lceil s \rfloor^\beta := [\lceil s_1 \rfloor^\beta \quad \ldots \quad \lceil s_n \rfloor^\beta]^T$, para cualquier $s \in \mathbb{R}^n$.

2.2 DEFINICIONES

Una función continua $\alpha : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ pertenece a la clase K si es estrictamente creciente y $\alpha(0) = 0$; pertenece a la clase K_∞ si también es no acotada. Una función continua $\beta : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ pertenece a la clase KL si para cada valor fijo de s, $\beta(\cdot, s) \in K$, y $\beta(r, \cdot)$ es estrictamente decreciente hacia cero para cualquier valor fijo de $r \in \mathbb{R}_+$. La función β pertenece a la clase KL_T si para cada valor fijo de s, $\beta(\cdot, s) \in K$, y para cada valor fijo de r, existe $0 < T(r) < \infty$ tal que $\beta(r, s)$ decrece hacia cero con respecto a $s < T(r)$, y $\beta(r, s) = 0$ para todo $s \geqslant T(r)$.

Se considera la siguiente ecuación diferencial variante en el tiempo, y que está representada como [29]:

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t)), \quad t \geqslant t_0, \quad t_0 \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ es el estado, $f : \mathbb{R}_{\geqslant 0} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una función continua con respecto a x y medible con respecto a t, además $f(t, 0) = 0$. Se asume que la solución de (2), para una condición inicial $x_0 \in \mathbb{R}^n$ en un tiempo $t_0 \in \mathbb{R}$, está dada por $x(t, t_0, x_0)$, y está definida en algún intervalo de tiempo $[t_0, t_0 + T)$, donde $0 \leqslant T < \infty$. Se considera Ω como un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, tal que $0 \in \Omega$.

Definición 1. *[29], [30]. En el punto de equilibrio $x = 0$, se dice que el sistema (2) es:*

- *Uniformemente Estable (UE), si para cualquier $\epsilon > 0$, existe un $\delta(\epsilon)$ tal que para cualquier $x_0 \in \Omega$, si $\|x_0\| \leqslant \delta(\epsilon)$, entonces $\|x(t, t_0, x_0)\| \leqslant \epsilon$ para todo $t \geqslant t_0$, para cualquier $t_0 \in \mathbb{R}$.*
- *Uniformemente Exponencialmente Estable (UEE), si cumple la condición de UE y tiene convergencia exponencial desde Ω, es decir, para cualquier*

$x_0 \in \Omega$, *se cumple que* $\|x(t, t_0, x_0)\| \leqslant k \cdot \|x_0\| \cdot e^{-\gamma(t-t_0)}$ *con* $k, \gamma > 0$ *para todo* $t \geqslant t_0$ *y cualquier* $t_0 \in \mathbb{R}$.

- *Uniformemente Estable en Tiempo-Finito (UETF), si cumple la condición de UE y converge en un tiempo finito desde* Ω, *es decir, para cualquier* $x_0 \in \Omega$, *existe un* $0 \leqslant T_{x_0} < +\infty$ *tal que* $x(t, t_0, x_0) = 0$ *para todo* $t \geqslant t_0 + T_{x_0}$ *y cualquier* $t_0 \in \mathbb{R}$. *La función* $T_0(x_0) = \inf\{T_{x_0} \geqslant 0 : x(t, t_0, x_0) = 0, \forall t \geqslant t_0 + T_{x_0}\}$ *se denomina tiempo de establecimiento del sistema (2).*

Si $\Omega = \mathbb{R}^n$, *entonces se dice que* $x = 0$ *es globalmente UE (GUE), UEE (GUEE) o UETF (GUETF), respectivamente.*

Definición 2. [31] *Considere el sistema*

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t), u) \tag{3}$$

El sistema (3) *se dice que es Entrada-Estado Estable (ISS, por las siglas en inglés de Input-to-State Stable) si para cualquier* $u \in L_\infty$ *existen funciones* $\beta \in KL$ *y* $\gamma \in K$ *tales que*

$$\|x(t, x_0, w)\| \leqslant \beta(\|x_0\|, t) + \gamma(\|u\|_\infty), \ \forall t \geqslant 0.$$

Además, si $\beta \in KL_T$, *el sistema* (3) *se dice que es Entrada-Estado Estable en Tiempo Finito (FT-ISS, por las siglas en inglés de Finite-Time Input-to-State Stable).*

Definición 3. *[32] Un grafo de formación* $\mathcal{G} = \{N, E, C\}$ *se compone de un conjunto de nodos* $N = \{R_1, \ldots, R_n\}$, *que corresponden a cada agente; un conjunto de aristas* $E = \{(R_j R_i) \in N \times N, |, i \neq j\}$, *que indica que el agente* R_i *recibe información del agente* R_j, *y un conjunto de etiquetas* $C = \{c_{ji} \in \mathbb{R}^3, |, (R_j R_i) \in N \times N, i \neq j\}$, *que representa un vector de posición relativa deseada del agente* R_i *con respecto al agente* R_j. *Además, sea* $N_i \subset N$ *el conjunto de posiciones detectables del agente* R_i.

3

CONTROL DE FORMACIÓN EN MULTI-QUAD-ROTORS

Este capítulo aborda el modelado y control de formación en multi-Quad-Rotors. Cada Quad-Rotor se describe mediante una dinámica simplificada presentada en la Sección 1.2. Se utilizan seis observadores por modos deslizantes en tiempo finito. Se propone una estrategia de control basada en tres controladores PID y tres controladores por modos deslizantes continuos (los cuales pueden ser TC, ST, MDST, o MDNST).

3.1 MODELADO DE UN GRUPO DE QUAD-ROTORS

Las ecuaciones que describen la dinámica de un grupo de n Quad-Rotors están dadas por (para detalles del modelado ver [6]):

$$\dot{\xi}_{1i} = \xi_{2i}, \tag{4a}$$
$$\dot{\xi}_{2i} = g_{\xi i}(\eta_{1i})u_{mi} - \mathbf{G}_i - \boldsymbol{\Lambda}_{\xi i}\xi_{2i} + \mathbf{d}_{\xi i}, \tag{4b}$$
$$\dot{\eta}_{1i} = \eta_{2i}, \tag{4c}$$
$$\dot{\eta}_{2i} = \mathbf{J}_i\boldsymbol{\tau}_i + \boldsymbol{\Xi}_i \boldsymbol{w}_{\eta i}(\eta_{2i}) - \boldsymbol{\Lambda}_{\eta i}\eta_{2i} + \mathbf{d}_{\eta i}, \tag{4d}$$
$$Y_i = [\xi_{1i}{}^\top \quad \eta_{1i}^\top]^\top, \tag{4e}$$

con $i = \overline{1,n}$, donde $\xi_{1i} := [x_i \quad y_i \quad z_i]^\top \in \mathbb{R}^3$, $\xi_{2i} := [\dot{x}_i \quad \dot{y}_i \quad \dot{z}_i]^\top \in \mathbb{R}^3$, $\eta_{1i} := [\phi_i \quad \theta_i \quad \psi_i]^\top \in \mathbb{R}^3$, $\eta_{2i} := [\dot{\phi}_i \quad \dot{\theta}_i, \quad \dot{\psi}_i]^\top \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{d}_{\xi_i} := [d_{x_i} \quad d_{y_i} \quad d_{z_i}]^\top \in \mathbb{R}^3$ y $\mathbf{d}_{\eta_i} := [d_{\phi_i} \quad d_{\theta_i} \quad d_{\psi_i}]^\top \in \mathbb{R}^3$. Los términos $x_i, y_i \in \mathbb{R}$ denotan las coordenadas en el plano horizontal, $z_i \in \mathbb{R}$ describe la posición vertical; ϕ_i, θ_i y $\psi_i \in \mathbb{R}$ representan los ángulos de inclinación alrededor del eje X (alabeo), el eje Y (cabeceo), y el eje Z (guiñada), respectivamente. Por otro lado, $\mathbf{G}_i := [0 \quad 0 \quad g]^\top \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{J}_i := \text{diag}(J_{xi}^{-1}, J_{yi}^{-1}, J_{zi}^{-1}) \in \mathbb{R}^{3\times3}$ y $\boldsymbol{\tau}_i := [\tau_{\phi_i} \quad \tau_{\theta_i} \quad \tau_{\psi_i}]^\top \in \mathbb{R}^3$, corresponden al vector de gravedad, a la matriz de inercia, y al vector de torques, con g como la aceleración gravitacional, J_{x_i}, J_{y_i} y J_{z_i} como los momentos de inercia en los ejes X, Y y Z, mientras que τ_{ϕ_i}, τ_{θ_i} y $\tau_{\psi_i} \in \mathbb{R}$ son los torques de alabeo, cabeceo y guiñada, respectivamente. El término $u_{m_i} := u_i/m_i$, donde $u_i \in \mathbb{R}$, representa el empuje en Z y $m_i \in \mathbb{R}^+$ representa la masa de cada Quad-Rotor. Las matrices $\boldsymbol{\Lambda}_{\xi i} := \text{diag}\,(a_{xi}, a_{yi}, a_{zi}) \in \mathbb{R}^{3\times3}$, $\boldsymbol{\Lambda}_{\eta i} := \text{diag}\,(a_{\phi i}, a_{\theta i}, a_{\psi i}) \in \mathbb{R}^{3\times3}$ y $\boldsymbol{\Xi}i := \text{diag}\,(b_{\phi i}, b_{\theta i}, b_{\psi i}) \in \mathbb{R}^{3\times3}$, están dadas por los coeficientes de amortiguación aerodinámicos a_{xi}, a_{yi} y a_{zi}, los coeficientes de resistencia rotacional de momento $a_{\phi i}$, $a_{\theta i}$ y $a_{\psi i}$, y los coeficientes de inercia $b_{\phi i} := (J_{yi} - J_{zi})/J_{xi}$, $b_{\theta i} := (J_{zi} - J_{xi})/J_{yi}$ y $b_{\psi i} := (J_{xi} - J_{yi})/J_{zi}$. Las funciones $\mathbf{g}_{\xi i} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ y $\boldsymbol{w}_{\eta i} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ se definen de la siguiente manera: $\mathbf{g}_{\xi i}(\eta_1 i) := [\cos\phi_i \,\text{sen}\,\theta_i \cos\psi_i + \text{sen}\,\phi_i \,\text{sen}\,\psi_i \quad \cos\phi_i \,\text{sen}\,\theta_i \,\text{sen}\,\psi_i - \text{sen}\,\phi_i \cos\psi_i \quad \cos\phi_i \cos\theta_i]^\top$ y $\boldsymbol{w}_{\eta i}(\eta_{2i}) := [\dot{\theta}_i\dot{\psi}_i \quad \dot{\phi}_i\dot{\psi}_i \quad \dot{\phi}_i\dot{\theta}_i]^\top$. Los términos d_x, d_y, d_z, d_{ϕ_i}, d_{θ_i} y $d_{\psi_i} \in \mathbb{R}$ representan las perturbaciones da-

das por incertidumbres y perturbaciones externas, *e.g.*, algunas dinámicas no modeladas y ráfagas de viento. La variable Y_i representa el vector de salidas del sistema, que mide la posición y orientación de cada agente.

***Suposición* 1.** *El líder es el único agente capaz de conocer la trayectoria deseada.*

***Suposición* 2.** *En el grafo estudiado, el líder tiene un árbol de expansión dirigido, es decir, hay caminos dirigidos desde el líder hacia todos los demás agentes (Figura 3).*

***Observación* 1.** *La suposición 2, indica que ningún agente quedará aislado. De esta manera, se asegura que los agentes converjan hacia la formación deseada utilizando la cantidad mínima de información que los agentes necesitan conocer.*

***Suposición* 3.** *Las trayectorias deseadas* $x_d(t)$, $y_d(t)$, $z_d(t)$ *y* $\psi_d(t)$ *están acotadas y son continuamente diferenciables.*

***Suposición* 4.** *Las perturbaciones están acotadas uniformemente y son Lipschitz, i.e.,* $d_x \in \mathcal{L}_{D_1}$, $d_y \in \mathcal{L}_{D_2}$, $d_z \in \mathcal{L}_{D_3}$, $d_\phi \in \mathcal{L}_{D_4}$, $d_\theta \in \mathcal{L}_{D_5}$, $d_\psi \in \mathcal{L}_{D_6}$, $\dot{d}_x \in \mathcal{L}_{\bar{D}_1}$, $\dot{d}_y \in \mathcal{L}_{\bar{D}_2}$, $\dot{d}_z \in \mathcal{L}_{\bar{D}_3}$, $\dot{d}_\phi \in \mathcal{L}_{\bar{D}_4}$, $\dot{d}_\theta \in \mathcal{L}_{\bar{D}_5}$, $\dot{d}_\psi \in \mathcal{L}_{\bar{D}_6}$; *con constantes positivas conocidas* D_j *y* $\bar{D}_j$, $j = \overline{1,6}$.

A continuación, se introducen las siguientes afirmaciones:

- El agente R_n se considera el agente líder, y los demás agentes como seguidores.
- Los vectores de formación deseados C_{ji} son invariantes en el tiempo, es decir, $C_{ji} = [c_{jix} \quad c_{jiy} \quad c_{jiz}]^\top$.
- La trayectoria deseada, para el agente líder R_n, se define como $\xi_d = [x_d \quad y_d \quad z_d]^T$ y $\eta_d = [\phi_{\star_n} \quad \theta_{\star_n} \quad \psi_d]$, donde x_d, y_d, z_d y $\psi_d \in \mathcal{C}^\infty$ son algunas trayectorias deseadas a seguir, mientras que $\phi_{\star_n}$ y $\theta_{\star_n}$ son señales de referencia generadas con unos controles virtuales (serán diseñados más adelante). La trayectoria deseada es continua y acotada.

3.2 ESTRATEGIA DE CONTROL

El diseño del control de formación, para un grupo de n Quad-Rotors, se basa en el grafo de formación presentado en la Figura 3.

3.2.1 *Observador por modos deslizantes en tiempo finito (FT-SMO)*

El sistema se encuentra afectado por perturbaciones desconocidas que impactan en la capacidad de vuelo de cada agente Quad-Rotor. Para abordar estos problemas, es esencial el empleo de observadores. En el nuestro caso, el observador presentado estima las velocidades en las coordenadas x, y, z y las velocidades angulares en ϕ, θ y ψ, además de las perturbaciones presentes en el sistema.

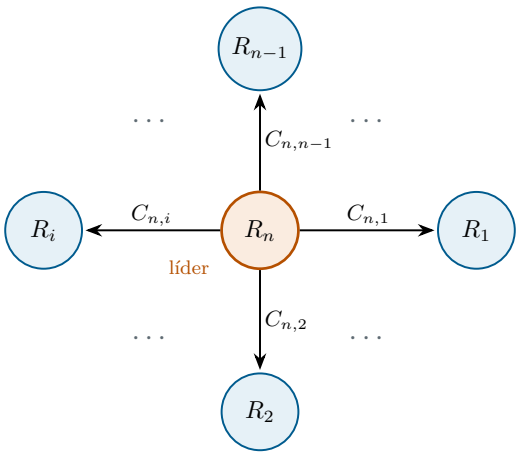


Figura 3: Grafo de formación centrado en el líder.

Considere el sistema (4), al cual se le propone el siguiente observador [24]:

$$\dot{\hat{\xi}}_{1i} = \hat{\xi}_{2i} + \hat{K}_{1i}\varphi_{1i}(\hat{e}_{\xi i}), \tag{5a}$$
$$\dot{\hat{\xi}}_{2i} = g_{\xi i}(\eta_{1i})u_{mi} - G - \Lambda_{\xi i}\hat{\xi}_{2i} + \hat{\xi}_{3i} + \hat{K}_{2i}\varphi_{2i}(\hat{e}_{\xi i}), \tag{5b}$$
$$\dot{\hat{\xi}}_{3i} = \hat{K}_{3i}\varphi_{3i}(\hat{e}_{\xi i}), \tag{5c}$$
$$\dot{\hat{\eta}}_{1i} = \hat{\eta}_{2i} + \hat{K}_{4i}\varphi_{1i}(\hat{e}_{\eta i}), \tag{5d}$$
$$\dot{\hat{\eta}}_{2i} = J_i\tau_i + \Xi_i w_i(\hat{\eta}_{2i}) - \Lambda_{\eta i}\hat{\eta}_{2i} + \hat{\eta}_{3i} + \hat{K}_{5i}\varphi_{2i}(\hat{e}_{\eta i}), \tag{5e}$$
$$\dot{\hat{\eta}}_{3i} = \hat{K}_{6i}\varphi_{3i}(\hat{e}_{\eta i}), \tag{5f}$$

donde $\hat{e}_{\xi i} := \xi_{1i} - \hat{\xi}_{1i} \in \mathbb{R}^3$ y $\hat{e}_{\eta i} := \eta_{1i} - \hat{\eta}_{1i} \in \mathbb{R}^3$ son los errores de salida; las inyecciones de salida no lineales φ_{1i}, φ_{2i}, $\varphi_{3i} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ están dadas como

$$\varphi_{1i}(s) := \lceil s \rfloor^{\frac{2}{3}}, \quad \varphi_2(s) := \lceil s \rfloor^{\frac{1}{3}}, \quad \varphi_3(s) := \lceil s \rfloor^0$$

con $\lceil s \rfloor^\gamma := [\lceil s_1 \rfloor^\gamma \quad \lceil s_2 \rfloor^\gamma \quad \lceil s_3 \rfloor^\gamma]^\top$, y una matriz diagonal de ganancias $\hat{K}_{ji} = \operatorname{diag}(k_{j1i}, k_{j2i}, k_{j3i})$ con $j = \overline{1,6}$. Se define el error de estado de estimación como $\hat{e} := [\hat{e}_{\xi i}^\top \quad \hat{\xi}_{\xi i}^\top \quad \hat{e}_{\xi i}^\top \quad \hat{e}_{\eta i}^\top \quad \hat{\xi}_{\eta i}^\top \quad \hat{e}_{\eta i}^\top]^\top$, donde $\hat{\xi}_{\xi i} := \xi_{2i} - \hat{\xi}_{2i}$ y $\hat{\xi}_{\eta i} := \eta_{2i} - \hat{\eta}_{2i}$, $\hat{e}_{\xi i} := d_{\xi i}(t) - \hat{\xi}_{3i}$ y $\hat{e}_{\eta i} := d_{\eta i}(t) - \hat{\eta}_{3i}$ son los errores de velocidad lineal y angular, respectivamente.

Las variables estimadas correspondientes a la velocidad ξ_{2i} del sistema están dadas por (5b) y las velocidades angulares η_{2i} por (5e), y las variables correspondientes a la estimación de perturbaciones del sistema son (5c) y (5f).

Entonces, si se aplica el observador (5) [24], al sistema (4), y las ganancias se seleccionan como [33]:

$$\begin{aligned}
\hat{k}_{11i} &= 2\bar{D}_x^{\frac{1}{3}}, \quad \hat{k}_{12i} = 1.5\bar{D}_x^{\frac{1}{2}}, \quad \hat{k}_{13i} = 1.1\bar{D}_x,\\
\hat{k}_{21i} &= 2\bar{D}_y^{\frac{1}{3}}, \quad \hat{k}_{22i} = 1.5\bar{D}_y^{\frac{1}{2}}, \quad \hat{k}_{23i} = 1.1\bar{D}_y,\\
\hat{k}_{31i} &= 2\bar{D}_z^{\frac{1}{3}}, \quad \hat{k}_{32i} = 1.5\bar{D}_z^{\frac{1}{2}}, \quad \hat{k}_{33i} = 1.1\bar{D}_z,\\
\hat{k}_{41i} &= 2\bar{D}_\phi^{\frac{1}{3}}, \quad \hat{k}_{42i} = 1.5\bar{D}_\phi^{\frac{1}{2}}, \quad \hat{k}_{43i} = 1.1\bar{D}_\phi,\\
\hat{k}_{51i} &= 2\bar{D}_\theta^{\frac{1}{3}}, \quad \hat{k}_{52i} = 1.5\bar{D}_\theta^{\frac{1}{2}}, \quad \hat{k}_{53i} = 1.1\bar{D}_\theta,\\
\hat{k}_{61i} &= 2\bar{D}_\psi^{\frac{1}{3}}, \quad \hat{k}_{62i} = 1.5\bar{D}_\psi^{\frac{1}{2}}, \quad \hat{k}_{63i} = 1.1\bar{D}_\psi,
\end{aligned}$$

y además la Suposición 4 se cumplen, $\hat{\boldsymbol{e}} = 0$, es UETF.

El análisis de estabilidad completo de este resultado se presenta como material complementario en el Apéndice B.

3.2.1.1 *Identificación de perturbaciones*

Por lo tanto, después de cierto tiempo finito, la dinámica del error de estimación puede ser escrita de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{e}}_{\xi i} &= \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\xi i} - \hat{\boldsymbol{K}}_{1i}\boldsymbol{\varphi}_{1i}(\hat{\boldsymbol{e}}_{\xi i}),\\
\dot{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}}_{\xi i} &= \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\xi i} - \hat{\boldsymbol{K}}_{2i}\boldsymbol{\varphi}_{2i}(\hat{\boldsymbol{e}}_{\xi i}),\\
\dot{\hat{\boldsymbol{e}}}_{\xi i} &= \dot{\boldsymbol{d}}_{\xi i} - \hat{\boldsymbol{K}}_{3i}\boldsymbol{\varphi}_{3i}(\hat{\boldsymbol{e}}_{\xi i}),\\
\dot{\boldsymbol{e}}_{\eta i} &= \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\eta i} - \hat{\boldsymbol{K}}_{4i}\boldsymbol{\varphi}_{1i}(\hat{\boldsymbol{e}}_{\eta i}),\\
\dot{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}}_{\eta i} &= \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\eta i} - \hat{\boldsymbol{K}}_{5i}\boldsymbol{\varphi}_{2i}(\hat{\boldsymbol{e}}_{\eta i}),\\
\dot{\hat{\boldsymbol{e}}}_{\eta i} &= \dot{\boldsymbol{d}}_{\eta i} - \hat{\boldsymbol{K}}_{6i}\boldsymbol{\varphi}_{3i}(\hat{\boldsymbol{e}}_{\eta i}).
\end{aligned}$$

Dado que esta dinámica es UETF, se cumple que $\hat{\boldsymbol{\xi}}_{1i}(t) = \boldsymbol{\xi}_{1i}(t)$, $\hat{\boldsymbol{\xi}}_{2i}(t) = \boldsymbol{\xi}_{2i}(t)$, $\hat{\boldsymbol{\xi}}_{3i}(t) = \boldsymbol{d}_\xi(t)$, $\hat{\boldsymbol{\eta}}_{1i}(t) = \boldsymbol{\eta}_{1i}(t)$, $\hat{\boldsymbol{\eta}}_{2i}(t) = \boldsymbol{\eta}_{2i}(t)$, $\hat{\boldsymbol{\eta}}_{3i}(t) = \boldsymbol{d}_\eta(t)$, para todo $t \geqslant T_0 > 0$. Si la suposición 4 se cumple, entonces el FT-SMO, dado por (5), proporciona las siguientes identificaciones de perturbaciones para todo $t \geqslant T_0$

$$\hat{\boldsymbol{\xi}}_{3i}(t) = [\hat{\xi}_{x3i}(t) \quad \hat{\xi}_{y3i}(t) \quad \hat{\xi}_{z3i}(t)]^\top = [d_x(t) \quad d_y(t) \quad d_z(t)]^\top, \tag{6a}$$

$$\hat{\boldsymbol{\eta}}_{3i}(t) = [\hat{\eta}_{\phi 3i}(t) \quad \hat{\eta}_{\theta 3i}(t) \quad \hat{\eta}_{\psi 3i}(t)]^\top = [d_\phi(t) \quad d_\theta(t) \quad d_\psi(t)]^\top. \tag{6b}$$

Dichos términos de identificación se pueden utilizar para fortalecer cualquier tipo de estrategia de control.

3.2.2 *Diseño de controladores*

Considerando el grafo de formación centrado en el líder, los errores de formación para los agentes $j = \overline{1, n-1}$ están dados de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{e}_{\xi j} &= \boldsymbol{\xi}_{1j} - \boldsymbol{\xi}_{1n} - C_{n,j},\\
\boldsymbol{\varepsilon}_{\xi j} &= \hat{\boldsymbol{\xi}}_{2j} - \boldsymbol{\xi}_{2n},\\
\boldsymbol{e}_{\eta j} &= \boldsymbol{\eta}_{1j} - \boldsymbol{\eta}_{dj},\\
\boldsymbol{\varepsilon}_{\eta j} &= \hat{\boldsymbol{\eta}}_{2j} - \dot{\boldsymbol{\eta}}_{dj},
\end{aligned}$$

donde $C_{n,j} \in \mathbb{R}^3$ es el vector de formación con respecto al líder y $\boldsymbol{\eta}_{dj} = [\phi_{\star j} \quad \theta_{\star j} \quad \psi_n]^\top \in \mathbb{R}^3$, con $\phi_{\star j}$ y $\theta_{\star j}$ como ciertas señales de referencia que se diseñan más adelante.

Por otro lado, el error de seguimiento del agente líder n está dado como

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_{\xi n} &= \boldsymbol{\xi}_{1n} - \boldsymbol{\xi}_d, \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{\xi n} &= \hat{\boldsymbol{\xi}}_{2n} - \dot{\boldsymbol{\xi}}_d, \\ \boldsymbol{e}_{\eta n} &= \boldsymbol{\eta}_{1n} - \boldsymbol{\eta}_d, \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{\eta n} &= \hat{\boldsymbol{\eta}}_{2n} - \dot{\boldsymbol{\eta}}_d, \end{aligned}$$

donde $\boldsymbol{\eta}_d = [\phi_{\star n} \quad \theta_{\star n} \quad \psi_d]^\top \in \mathbb{R}^3$, con las referencias $\phi_{\star n}$ y $\theta_{\star n}$ que también se diseñan más adelante.

Debido a la naturaleza subactuada de los Quad-Rotors (cuatro entradas para 6 grados de libertad), dos grados de libertad no pueden ser "controlados" de manera independiente. Por lo general, estos grados de libertad corresponden al cabeceo y al alabeo, los cuales son diseñados como señales de referencia, siendo denotadas como $\phi_{\star_i}$, $\theta_{\star_i}$.

De esta manera, a la dinámica del error de posición se le introduce un controlador virtual: $\nu_i := [\nu_{xi} \quad \nu_{yi} \quad \nu_{zi}]^\top$, y entonces, la dinámica del error de formación puede ser escrita como:

$$\dot{\boldsymbol{e}}_{\xi i} = \boldsymbol{\varepsilon}_{\xi i}, \tag{7a}$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\xi i} = \nu_i + \boldsymbol{w}_{\xi i}(\boldsymbol{\eta}_{1i}, u_{mi}, \nu_i) - \boldsymbol{\Lambda}_{\xi i}\boldsymbol{\xi}_{2i} + \mathbf{d}_{\xi i} - \ddot{\boldsymbol{\xi}}_{di}, \tag{7b}$$

$$\dot{\boldsymbol{e}}_{\eta i} = \boldsymbol{\varepsilon}_{\eta i}, \tag{7c}$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\eta i} = \mathbf{J}_i\boldsymbol{\tau}_i + \boldsymbol{\Xi}_i\boldsymbol{w}_{\eta i}(\boldsymbol{\eta}_{2i}) - \boldsymbol{\Lambda}_{\eta i}\boldsymbol{\eta}_{2i} + \mathbf{d}_{\eta i} - \ddot{\boldsymbol{\eta}}_{di}, \tag{7d}$$

donde $\boldsymbol{w}_{\xi i}(\boldsymbol{\eta}_{1i}, u_{mi}, \nu_i) = \mathbf{g}_{\xi i}(\boldsymbol{\eta}_{1i})u_{mi} - \mathbf{G}_i - \nu_i$. Entonces, el control virtual ν_i se selecciona como:

$$\nu_{xi} = u_{mi}(\cos\phi_{\star i}\,\mathrm{sen}\,\theta_{\star i}\cos\psi_{di} + \mathrm{sen}\,\phi_{\star i}\,\mathrm{sen}\,\psi_{di}), \tag{8a}$$

$$\nu_{yi} = u_{mi}(\cos\phi_{\star i}\,\mathrm{sen}\,\theta_{\star i}\,\mathrm{sen}\,\psi_{di} - \mathrm{sen}\,\phi_{\star i}\cos\psi_{di}), \tag{8b}$$

$$\nu_{zi} = u_{mi}\cos\phi_{\star i}\cos\theta_{\star i} - g, \tag{8c}$$

donde $i = \overline{1,n}$, $\psi_{di} = \psi_n$, salvo en $i = n$, siendo $\psi_n = \psi_d$; las señales de referencia para cada agente se obtiene resolviendo (8) para u_i, $\phi_{\star i}$, $\theta_{\star i}$:

$$u_i = m_i\sqrt{\nu_{xi}^2 + \nu_{yi}^2 + (\nu_{zi} + g)^2}, \tag{9a}$$

$$\phi_{\star i} = \mathrm{arc\,sen}\,[u_{m_i}^{-1}(\nu_{xi}\,\mathrm{sen}\,\psi_{di} - \nu_{yi}\cos\psi_{di})], \tag{9b}$$

$$\theta_{\star i} = \arctan\,[(\nu_{zi} + g)^{-1}(\nu_{xi}\cos\psi_{di} + \nu_{yi}\,\mathrm{sen}\,\psi_{di})]. \tag{9c}$$

Las señales obtenidas en (9), ayudarán a que el sistema logre el objetivo de vuelo deseado. Por otro lado, el control virtual ν_i, y el torque $\boldsymbol{\tau}_i$ tienen la siguiente forma

$$\nu_i = \bar{\nu}_i + \boldsymbol{\Lambda}_{\xi i}\boldsymbol{\xi}_{2i} + \ddot{\boldsymbol{\xi}}_{di} - \hat{\boldsymbol{\xi}}_{3i}, \tag{10a}$$

$$\boldsymbol{\tau}_i = \mathbf{J}_i^{-1}(\bar{\tau}_i - \boldsymbol{\Xi}\boldsymbol{w}_{\eta i}(\boldsymbol{\eta}_{2i}) + \boldsymbol{\Lambda}_{\eta i}\boldsymbol{\eta}_{2i} + \ddot{\boldsymbol{\eta}}_{di} - \hat{\boldsymbol{\eta}}_{3i}). \tag{10b}$$

Las variables auxiliares $\bar{\nu}_i = [\bar{\nu}_{xi} \quad \bar{\nu}_{yi} \quad \bar{\nu}_{zi}]^\top$ son diseñadas como PIDs, dados por:

$$\bar{\nu}_{xi} = k_{0xi}\epsilon_{xi} + k_{1xi}e_{xi} + k_{2xi}\varepsilon_{xi}, \tag{11a}$$
$$\bar{\nu}_{yi} = k_{0yi}\epsilon_{yi} + k_{1yi}e_{yi} + k_{2yi}\varepsilon_{yi}, \tag{11b}$$
$$\bar{\nu}_{zi} = k_{0zi}\epsilon_{zi} + k_{1zi}e_{zi} + k_{2zi}\varepsilon_{zi}, \tag{11c}$$

donde, $\boldsymbol{e}_{\xi i} = [e_{xi} \quad e_{yi} \quad e_{zi}]^\top$, $\boldsymbol{\varepsilon}_{\xi i} = [\varepsilon_{xi} \quad \varepsilon_{yi} \quad \varepsilon_{zi}]^\top$, $\boldsymbol{\epsilon}_{\xi i} = \int_0^t \boldsymbol{e}_{\xi i}(\tau)d\tau = [\epsilon_{xi} \; \epsilon_{yi} \; \epsilon_{zi}]^\top$; las ganancias k_{0qi}, k_{1qi}, k_{2qi}, con $i = \overline{1,n}$ y $q = x, y, z$, son seleccionadas de tal manera que las matrices

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ k_{0qi} & k_{1qi} & k_{2qi} \end{bmatrix}, \tag{12}$$

son Hurwitz para todo $i = \overline{1,n}$ y $q = x,\ y,\ z$

Los torques $\bar{\tau} = [\bar{\tau}_{\phi i} \quad \bar{\tau}_{\theta i} \quad \bar{\tau}_{\psi i}]^\top$, serán diseñados utilizando los siguientes controladores

a) PID:

$$\bar{\tau}_{li} = k_{0li}\epsilon_{li} + k_{1li}e_{li} + k_{2li}\varepsilon_{li},\ \forall\, l = \phi,\ \theta,\ \psi \tag{13}$$

las ganancias k_{0li}, k_{1li}, k_{2li}, con $i = \overline{1,n}$, son tales que las matrices:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ k_{0li} & k_{1li} & k_{2li} \end{bmatrix},$$

son Hurwitz para todo $i = \overline{1,n}$ y $l = \phi,\ \theta,\ \psi$.

b) ST [25]:

$$\begin{aligned} s_{li} &= \varepsilon_{li} + k_{l0i}e_{li}, \\ \bar{\tau}_{li} &= \nu_{li} - k_{l1i}\lceil s_{li}\rfloor^{\frac{1}{2}}, \\ \dot{\nu}_i &= -k_{l2i}\lceil s_{li}\rfloor^{0}, \end{aligned} \tag{14}$$

donde una posible selección de las ganancias está en la Tabla 1 (para más detalles, ver [33]), para todo $i = \overline{1,n}$ y $l = \phi,\ \theta,\ \psi$.

c) TC [26]:

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_{li} &= \nu_i - k_{l0i}\lceil e_{li}\rfloor^{\frac{1}{3}} - k_{l1i}\lceil \varepsilon_{li}\rfloor^{\frac{1}{2}}, \\ \dot{\nu}_i &= -k_{l2i}\lceil e_{li}\rfloor^{0} - k_{l3i}\lceil \varepsilon_{li}\rfloor^{0}, \end{aligned} \tag{15}$$

donde una posible selección de las ganancias está en la Tabla 2, para todo $i = \overline{1,n}$ y $l = \phi,\ \theta,\ \psi$.

d) MDST [27]:

$$\begin{aligned} s_{li} &= \varepsilon_{li} + k_{l0i}\lceil e_{li}\rfloor^{\frac{2}{3}}, \\ \bar{\tau}_{li} &= \nu_i - k_{l1i}\lceil s_{li}\rfloor^{\frac{1}{2}}, \\ \dot{\nu}_i &= -k_{l2i}\lceil s_{li}\rfloor^{0}, \end{aligned} \tag{16}$$

donde una posible selección de las ganancias está en la Tabla 1, para todo $i = \overline{1,n}$ y $l = \phi,\ \theta,\ \psi$.

e) MDNST [28] :

$$\begin{aligned} s_{li} &= e_{li} + k_{l0i}\lceil \varepsilon_{li}\rfloor^{\frac{3}{2}}, \\ \bar{\tau}_{li} &= \nu_i - k_{l1i}\lceil s_{li}\rfloor^{\frac{1}{3}}, \\ \dot{\nu}_i &= -k_{l2i}\lceil s_{li}\rfloor^{0}, \end{aligned} \tag{17}$$

donde una posible selección de las ganancias está en la Tabla 3, para todo $i = \overline{1,n}$ y $l = \phi,\ \theta,\ \psi$.

Tabla 1: Selección de ganancias del ST y MDST

Conjunto	k_{l0i}	k_{l1i}	k_{l2i}	ζ
1	> 0	$1.5\zeta^{\frac{1}{2}}$	1.1ζ	> 0

Tabla 2: Selección de ganancias del TC

Conjunto	k_{l0i}	k_{l1i}	k_{l2i}	k_{l3i}	ζ
1	$25\zeta^{\frac{2}{3}}$	$15\zeta^{\frac{1}{2}}$	2.3ζ	1.1ζ	> 0
2	$19\zeta^{\frac{2}{3}}$	$10\zeta^{\frac{1}{2}}$	2.3ζ	1.1ζ	> 0
3	$13\zeta^{\frac{2}{3}}$	$7.5\zeta^{\frac{1}{2}}$	2.3ζ	1.1ζ	> 0
4	$7\zeta^{\frac{2}{3}}$	$5\zeta^{\frac{1}{2}}$	2.3ζ	1.1ζ	> 0

Tabla 3: Selección de ganancias del MDNST

Conjunto	k_{l0i}	k_{l1i}	k_{l2i}	ζ
1	$20\zeta^{-\frac{1}{2}}$	$4.4\zeta^{\frac{2}{3}}$	2.5ζ	> 0
2	$28.7\zeta^{-\frac{1}{2}}$	$4.5\zeta^{\frac{2}{3}}$	2ζ	> 0
3	$7.7\zeta^{-\frac{1}{2}}$	$7.5\zeta^{\frac{2}{3}}$	2ζ	> 0
4	$\zeta^{-\frac{1}{2}}$	$16\zeta^{\frac{2}{3}}$	7ζ	> 0

Teorema 1. *Sea el control* (9)*, y considere que* (10) *aplicado al sistema* (4) *y las suposiciones 3, 4 se satisfacen. Suponiendo que las ganancias de los controladores virtuales PID's de cada agente son seleccionadas tal que las matrices* (12) *son Hurwitz, y* $\bar{\tau}_{\phi i}$, $\bar{\tau}_{\theta i}$ *y* $\bar{\tau}_{\psi i}$ *son diseñadas de acuerdo a cualquier controlador dado en a)-e). Entonces, en estado estacionario* $[\boldsymbol{e}_{\xi i}^{\top} \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{\xi i}^{\top} \quad \boldsymbol{e}_{\eta i}^{\top} \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{\eta i}^{\top}]^{\top}$*, la dinámica del error de seguimiento es UEE.*

Aplicando el controlador (9), (10a) y (11), es posible probar que la dinámica del error de formación (7a)-(7b) es ISS, con respecto a $e_{\eta i}$ (para más detalles, ver [24]). Por otro lado, aplicando (9b), (9c), (10b), y cualquiera de los controladores (15), (16) o (17), es posible probar que $[e_{\eta i} \quad \varepsilon_{\eta i}]^\top = [0 \quad 0]^\top$ es UETF. Cuando se aplican los controladores (13) o (14), $[e_{\eta i} \quad \varepsilon_{\eta i}]^\top = [0 \quad 0]^\top$ es UEE (para más detalles, ver [24]).

Finalmente, como consecuencia de los resultados mencionados anteriormente, se obtiene que las trayectorias de la dinámica del error de formación (7) convergen a cero de manera uniforme y exponencial [24], *i.e.*, el resultado del Teorema 1.

El esquema de control se muestra en la Figura 4. Se puede ver que el agente n es el único que conoce la trayectoria deseada $\xi_d = [x_d \quad y_d \quad z_d]^\top$ y ψ_d, la trayectoria deseada de los agentes seguidores $n-1$, es generada a partir de la posición del líder, más el vector de formación deseado para cada agente. la aceleración deseada, así como, el control (10a) son realimentados en el bloque de *Desacoplamiento no lineal*. En el caso de los agentes seguidores, estas aceleraciones pueden ser estimadas con los observadores.

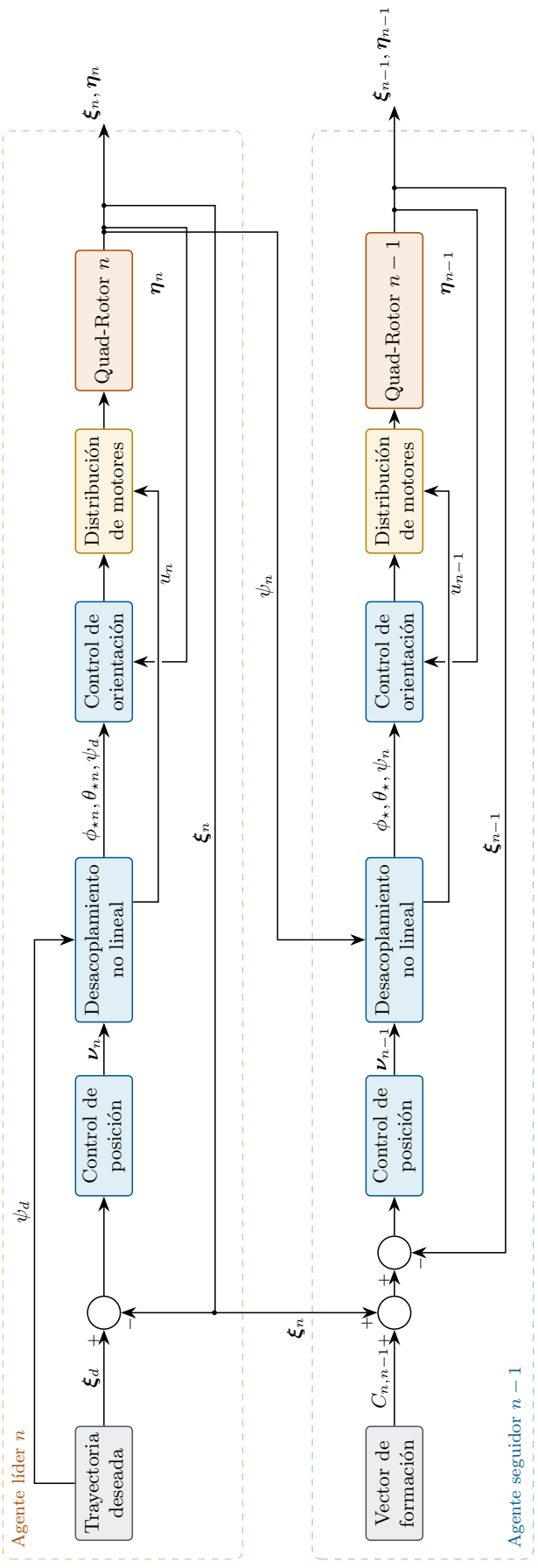


Figura 4: Esquema de control.

4

RESULTADOS DE SIMULACIÓN Y EXPERIMENTALES.

En este capítulo se presentan los resultados de simulación y experimentales obtenidos al aplicar diferentes controladores para mantener la formación de nano Quad-Rotors. Se analizará el desempeño de los controladores PID, TC, ST, MDST y MDNST, en términos de trayectorias y ángulo de guiñada, así como los errores de formación y esfuerzo de control de cada agente.

4.1 RESULTADOS DE SIMULACIÓN

Las siguientes perturbaciones son consideradas para la realización de las simulaciones:

$$\begin{aligned}
d_x &= 0.3\,\mathrm{sen}(0.4t),\\
d_y &= 0.3\cos(0.4t),\\
d_z &= -0.5 + 0.1\,\mathrm{sen}(0.4t) - 0.1\,\mathrm{sen}(0.6t) + 0.1\cos(0.8t),\\
d_\phi &= -0.5 + 0.2\,\mathrm{sen}(0.4t) - 0.2\,\mathrm{sen}(0.6t) + 0.2\cos(0.6t),\\
d_\theta &= -0.5 + 0.2\cos(0.8t) - 0.2\,\mathrm{sen}(0.4t) + 0.2\cos(0.8t),\\
d_\psi &= -0.5 + 0.2\cos(0.8t) - 0.2\,\mathrm{sen}(0.6t) + 0.2\cos(0.8t).
\end{aligned}$$

Se consideran 5 agentes ($n = 5$). Los coeficientes de resistencia rotacional son $a_{li} = 1.52 \times 10^{-7}$ [Ns/rad], con $l = \phi, \theta, \psi$; los coeficientes de amortiguación aerodinámica son $a_{xi} = a_{yi} = a_{zi} = 2.47 \times 10^{-7}$ [Ns/kgm]; los momentos de inercia de los agentes son $J_{xi} = 9.827 \times 10^{-5}$ [kg$\cdot$ m^2], $J_{yi} = 8.185 \times 10^{-5}$ [kg$\cdot$ m^2], $J_{zi} = 9.613 \times 10^{-5}$ [kg$\cdot$ m^2]; la masa de los agentes es $m_i = 0.032$ [kg].

Las trayectorias deseadas del líder (R_5) están dadas por:

$$\begin{aligned}
x_d &= (\arctan(15) + \arctan(t-15))\cos\left(\frac{\pi}{5}t\right),\\
y_d &= (\arctan(15) + \arctan(t-15))\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{5}t\right),\\
z_d &= 1 + \tanh(t-5) - 2.5,\\
\psi_d &= 0.
\end{aligned} \tag{18}$$

Los vectores de formación son los siguientes: $C_{51} = [1 \quad 1 \quad 0]^\top$, $C_{52} = [-1 \quad 1 \quad 0]^\top$, $C_{53} = [1 \quad -1 \quad 0]^\top$, $C_{54} = [-1 \quad -1 \quad 0]^\top$. Las ganancias seleccionadas de los controladores se muestran en la Tabla 6, mientras que las ganancias de los observadores son $\hat{K}_{1i} = 4.0716I_3$, $\hat{K}_{2i} = 2.3717I_3$, $\hat{K}_{3i} = 2.75I_3$, $\hat{K}_{4i} = 4.3267I_3$, $\hat{K}_{5i} = 2.5981I_3$ y $\hat{K}_{6i} = 3.3I_3$, para todo $i = \overline{1,n}$, con I_3 como una matriz identidad de dimensión 3×3.

La Figura 5 muestra la trayectoria de los agentes, donde el agente R_5 es el agente líder, observándose que los agentes seguidores conservan la formación deseada con respecto al líder; la Figura corresponde al del

controlador MDNST, ya que este tuvo un mejor desempeño en cuanto al error de posición, además de que los cinco controladores muestran un comportamiento similar y visualmente la diferencia que se observa es mínima.

Para ilustrar el desempeño de los controladores, se propone el siguiente índice de desempeño:

$$f_{RMS}(t) = \left(\frac{1}{\Delta T} \int_{t-\Delta T}^{t} \|f(\sigma)\|^2 d\sigma \right)^{\frac{1}{2}} \tag{19}$$

donde $f_{RMS} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ representa el error cuadrático medio de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$. Los resultados de los índices de desempeño del promedio de los errores de formación en (x_i, y_i, z_i, ψ_i) se muestran en la Figura 6, y las señales de control $(u_i, \tau_{\phi i}, \tau_{\theta i}, \tau_{\psi i})$ en la Figura 7, con $\Delta T = 2$. Las Tablas 4 y 5 muestran las propiedades del promedio, del índice de desempeño de las señales, de los errores y de control. En cuanto a los errores, se observa que el controlador MDNST tiene, en general, el mejor desempeño; sin embargo, en cuanto al índice de desempeño de las entradas, el controlador ST es el mejor.

Tabla 4: Índice de desempeño de los errores de posición (x_i, y_i, z_i, ψ_i)

Controlador	$e_{xi} - RMS$	$e_{yi} - RMS$	$e_{zi} - RMS$	$e_{\psi i} - RMS$
PID	4.062×10^{-4}	1.455×10^{-3}	$\mathbf{8.462 \times 10^{-4}}$	3.801×10^{-5}
TC	1.660×10^{-4}	6.649×10^{-4}	8.484×10^{-4}	9.132×10^{-8}
ST	4.359×10^{-4}	5.997×10^{-4}	8.485×10^{-4}	1.895×10^{-6}
MDST	3.692×10^{-4}	1.051×10^{-3}	8.485×10^{-4}	$\mathbf{1.143 \times 10^{-8}}$
MDNST	$\mathbf{1.030 \times 10^{-4}}$	$\mathbf{2.685 \times 10^{-4}}$	8.484×10^{-4}	5.183×10^{-6}

Tabla 5: Índice de desempeño de las entradas de control $(u_i, \tau_{\phi i}, \tau_{\theta i}, \tau_{\psi i})$

Controlador	$u_i - RMS$	$\tau_{\phi i} - RMS$	$\tau_{\theta i} - RMS$	$\tau_{\psi i} - RMS$
PID	0.329	1.829×10^{-4}	$\mathbf{5.922 \times 10^{-5}}$	$\mathbf{5.776 \times 10^{-5}}$
TC	0.329	2.957×10^{-4}	2.458×10^{-4}	6.698×10^{-5}
ST	0.329	$\mathbf{1.149 \times 10^{-4}}$	8.903×10^{-5}	5.777×10^{-5}
MDST	0.329	1.291×10^{-4}	1.074×10^{-4}	5.781×10^{-5}
MDNST	0.329	3.499×10^{-3}	2.903×10^{-3}	1.208×10^{-3}

4.2 RESULTADOS EXPERIMENTALES

Para demostrar la efectividad de los controladores propuestos, estos se implementaron en un sistema de tres nano Quad-Rotors. El sistema consta de un líder virtual y dos seguidores. La plataforma experimental se describe en la Subsección 4.2.1.

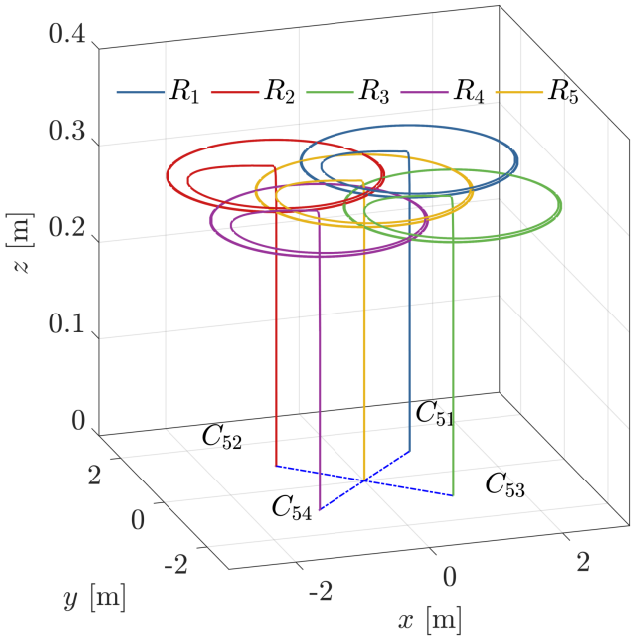


Figura 5: Trayectorias de los agentes.

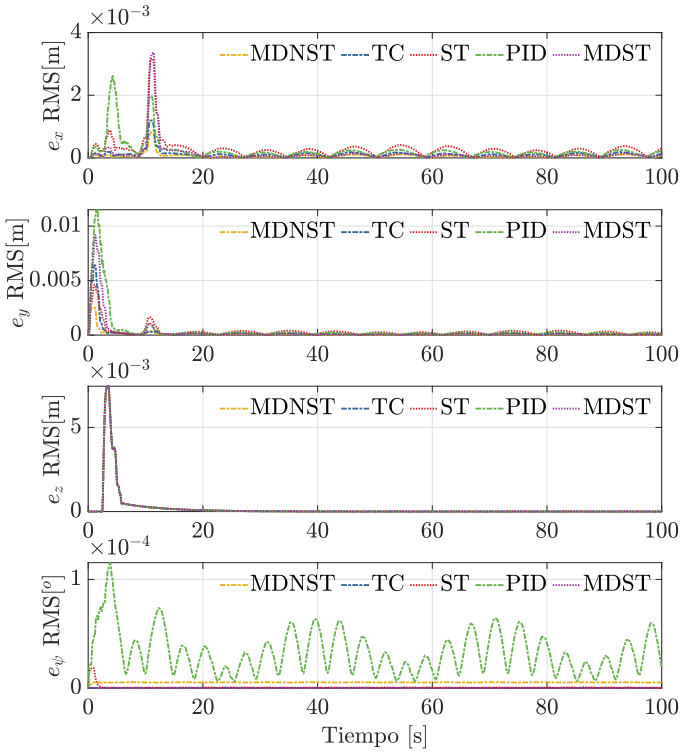


Figura 6: Índice de los errores de posición de los agentes.

4.2.1 *Plataforma Experimental*

La plataforma de los nano Quad-Rotors Crazyflie consta de tres principales componentes, como se muestra en la Figura 8:

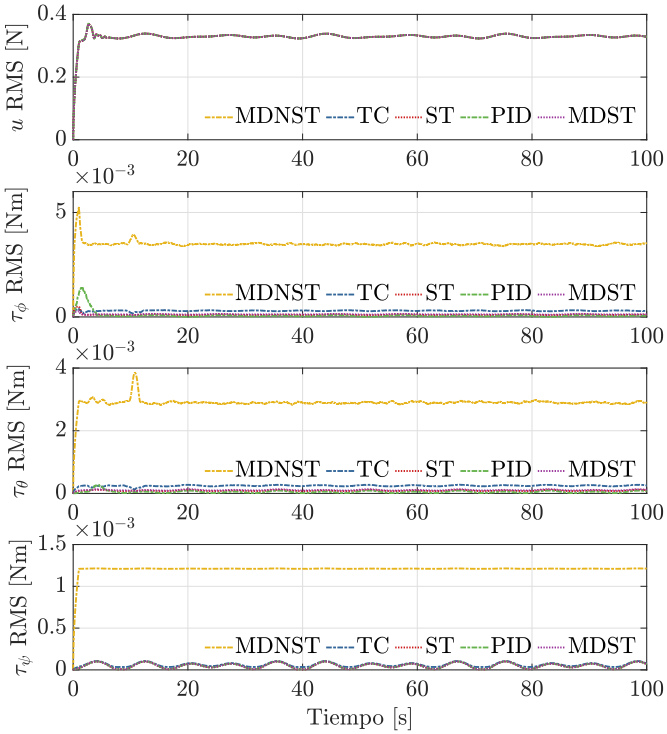


Figura 7: Indice de las señales de control de los agentes.

(1) Sistema de posicionamiento Motion Capture de Optitrack.

(2) Estación terrestre.

(3) Nano Quad-Rotors Crazyflie.

El funcionamiento de la plataforma experimental se detalla en el Apendice A.

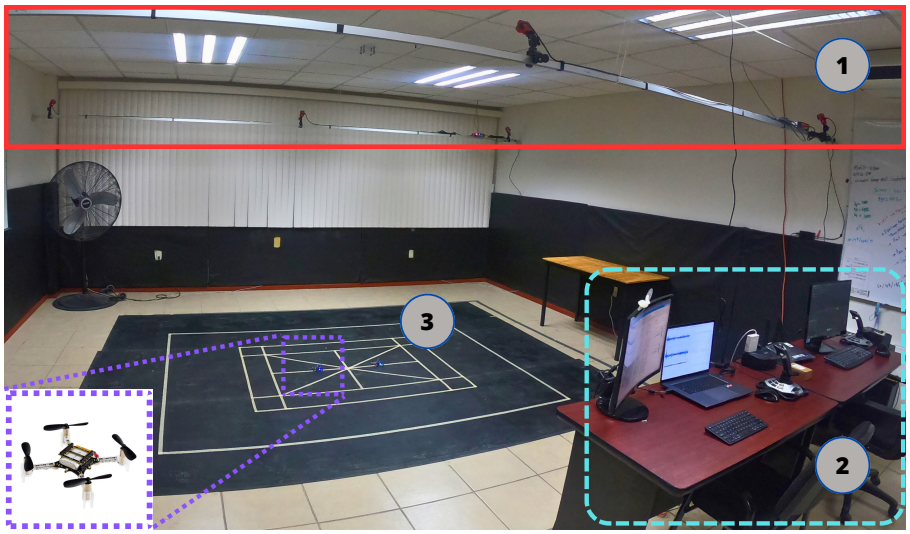


Figura 8: Plataforma nano Quad-Rotors Crazyflie.

Tabla 6: Parámetros de los controladores.

	Parámetros					
Controlador	k_{0xi}	k_{0yi}	k_{0zi}	$k_{\phi 0i}$	$k_{\theta 0i}$	$k_{\psi 0i}$
PID	5.0	5.0	20.0	18.0	18.0	20.0
ST	5.0	5.0	20.0	12.0	12.0	2.8
TC	5.0	5.0	20.0	44.3147	44.3147	29.0099
MDST	5.0	5.0	20.0	2.6	2.6	2.1
MDNST	5.0	5.0	20.0	0.1051	0.1051	0.1054
Controlador	k_{1xi}	k_{1yi}	k_{1zi}	$k_{\phi 1i}$	$k_{\theta 1i}$	$k_{\psi 1i}$
PID	28.5	28.5	155.2	180.0	180.0	200.0
ST	28.5	28.5	155.2	12.0934	12.0934	0.5293
TC	28.5	28.5	155.2	23.0434	23.0434	16.7705
MDST	28.5	28.5	155.2	10.1181	10.1181	4.3732
MDNST	28.5	28.5	155.2	322.6356	322.6356	321.3278
Controlador	k_{2xi}	k_{2yi}	k_{2zi}	$k_{\phi 2i}$	$k_{\theta 2i}$	$k_{\psi 2i}$
PID	5.5	5.5	10.0	10.0	10.0	10.0
ST	5.5	5.5	10.0	71.50	71.50	0.1370
TC	5.5	5.5	10.0	5.4280	5.4280	2.8750
MDST	5.5	5.5	10.0	50.05	50.05	9.350
MDNST	5.5	5.5	10.0	633.8	633.8	630.0
Controlador	k_{3xi}	k_{3yi}	k_{3zi}	$k_{\phi 3i}$	$k_{\theta 3i}$	$k_{\psi 3i}$
PID	–	–	–	–	–	–
ST	–	–	–	–	–	–
TC	–	–	–	2.5960	2.5960	1.3750
MDST	–	–	–	–	–	–
MDNST	–	–	–	–	–	–

4.2.2 *Validación Experimental*

En la validación, se implementaron los controladores de orientación (13), (14), (15), (17) y (16) y de posición (10a), (11a)–(11c) en los nano Quad-Rotors Crazyflie, cabe resaltar que en los experimentos no se utilizarón los observadores. La realimentación de posición se obtuvo mediante el sistema de captura de movimiento de Optitrack enviada, transmitida mediante ROS-VRPN a los UAVs junto con la trayectoria deseada desde una computadora externa (estación terrestre). La trayectoria del líder virtual (R_3) se definió según (18). Los vectores de formación son los siguientes:

$$C_{31} = [-0.2 \quad 0 \quad 0]^\top,$$
$$C_{32} = [0.2 \quad 0 \quad 0]^\top.$$

4.2.2.1 *Resultados Experimentales*

Las Figuras 9, 10, 11, 12 y 13 muestran los resultados obtenidos al aplicar los controladores PID, TC, ST, MDST y MDNST al sistema, respectivamente. En ellas, se aprecia que los controladores logran mantener la formación deseada de los agentes.

Las figuras presentan la trayectoria promedio de los agentes R_1, R_2 y R_3 en los ejes x, y y z. Estas trayectorias se obtuvieron tras realizar diez experimentos para cada tipo de controlador. También se incluye el comportamiento del ángulo de guiñada. Las ganancias seleccionadas para cada controlador están detalladas en la Tabla 7.

Para evaluar el rendimiento de cada controlador, se calculó el error de formación promedio (en RMS) de los agentes seguidores R_1 y R_2 (x, y, z, ψ) para cada controlador. Además, han sido considerados los índices de desempeño RMS mínimo, medio y máximo para cada agente. Los mejores resultados están resaltados en negritas. Se consideraron los datos desde un tiempo inicial $t_0 = 10$ [s] y un tiempo final $t_f = 60$ [s] para evitar que los índices sean afectados por las condiciones iniciales de los nano Quad-Rotor. Los resultados están reflejados en las Figuras 14 y 15, que muestran los errores en RMS de (x_i, y_i, z_i, ψ_i) de posición y guiñada para cada agente. Las entradas de control promedio de $(u_i, \tau_{\phi i}, \tau_{\theta i}, \tau_{\psi i})$ en RMS para cada controlador están en las Figuras 16 y 17.

Las Tablas 8-11 muestran los índices de desempeño del error de posición y guiñada. Se observa un desempeño muy parecido entre los controladores, pero el controlador MDNST es el que muestra peor rendimiento. Las Tablas 12-15 presentan los índices de desempeño correspondientes a las entradas de control. El controlador MDNST es el que tiene peor rendimiento. En las Tablas 16-19, que representan los índices de desempeño de los errores de posición y guiñada del agente R_2, se observa que el controlador ST tiene el mejor rendimiento. Mientras que las Tablas 20-23, muestran los índices de desempeño de las entradas de control del agente R_2, donde se observa un comportamiento similar entre los controladores.

Se observa que los controladores presentan comportamientos notablemente similares entre sí. Sin embargo, al comparar los índices, se concluye que los controladores con mejor desempeño son PID y ST, mientras que el controlador MDNST es el que muestra el peor desempeño.

Es importante destacar que su rendimiento puede verse afectado por varios factores externos, como la pérdida de información desde la estación terrestre, las limitaciones del hardware de la computadora a la que están conectados, y las restricciones en la capacidad de procesamiento del microprocesador de los nano Quad-Rotors, sobre todo cuando el controlador demanda una alta carga computacional. Las condiciones iniciales del agente también pueden influir en su desempeño. A pesar de estas complicaciones, se ha validado la efectividad de los controladores en mantener la formación deseada.

Las señales de control del nano Quad-Rotor Crazyflie deben ser enviadas en RPM (revoluciones por minuto). Para realizar la conversión de la entrada

de control, que se encuentra en Newtons, a RPM, se utiliza una función descrita en [34]. Los detalles de esta función se explican en el Apéndice A.1.

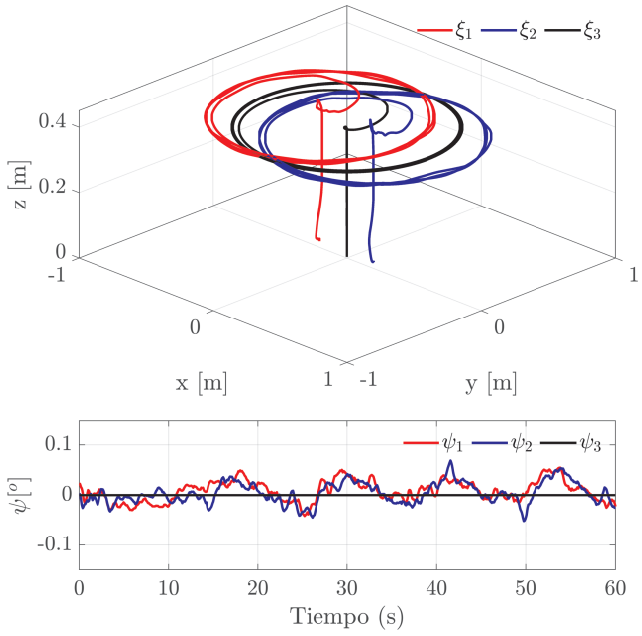


Figura 9: Resultados del controlador PID: Posición y guiñada

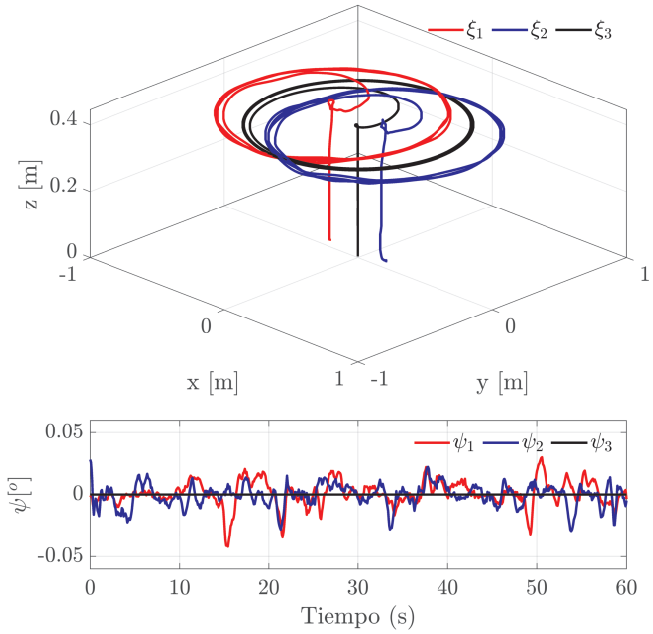


Figura 10: Resultados del controlador TC: Posición y guiñada

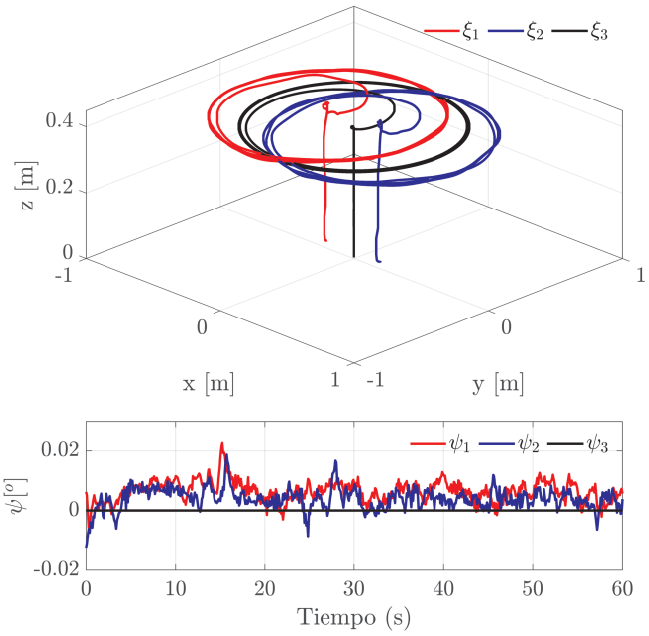


Figura 11: Resultados del controlador ST: Posición y guiñada

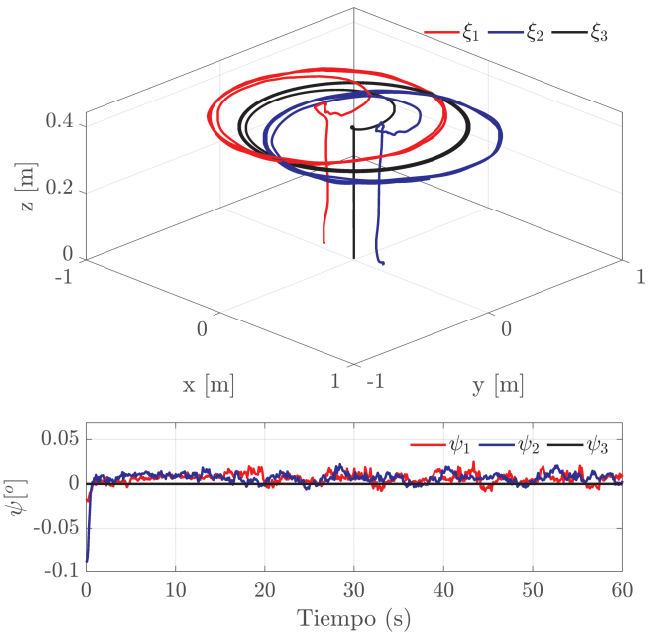


Figura 12: Resultados del controlador MDST: Posición y guiñada

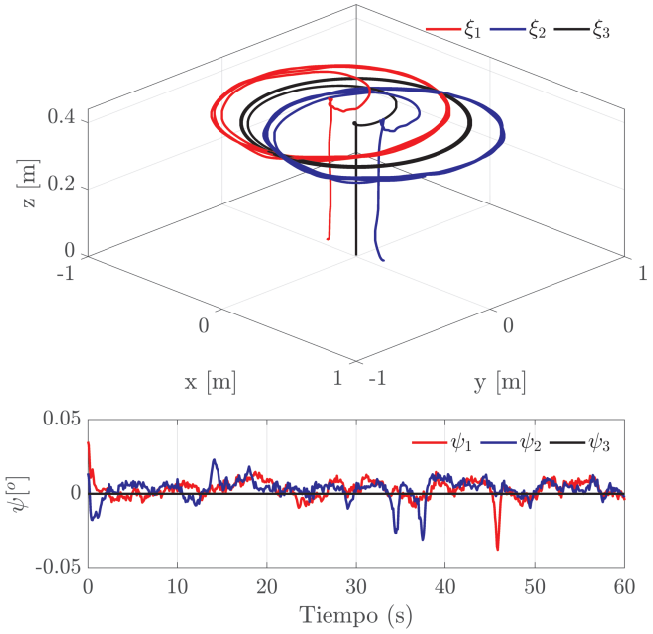


Figura 13: Resultados del controlador MDNST: Posición y guiñada

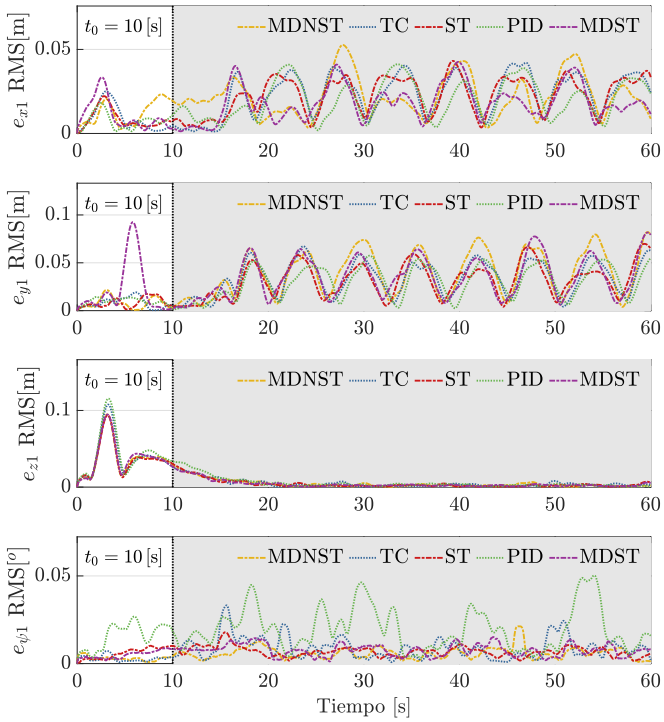


Figura 14: Errores de posición y guiñada RMS del agente seguidor R_1

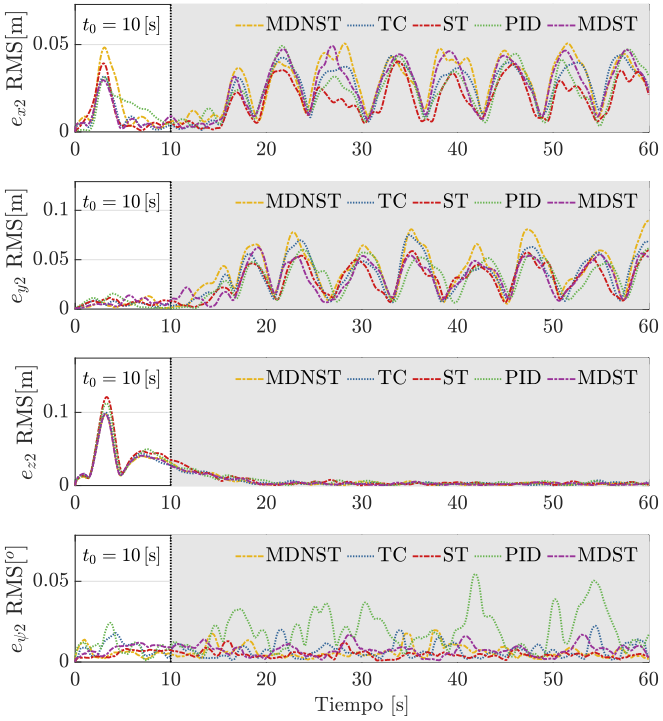


Figura 15: Errores de posición y guiñada RMS del agente seguidor R_2

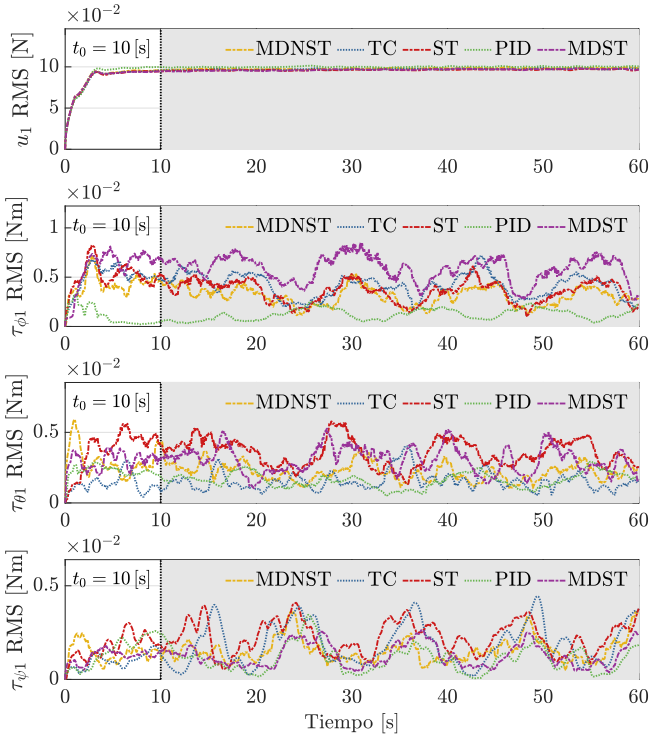


Figura 16: Entradas de control RMS del agente seguidor R_1

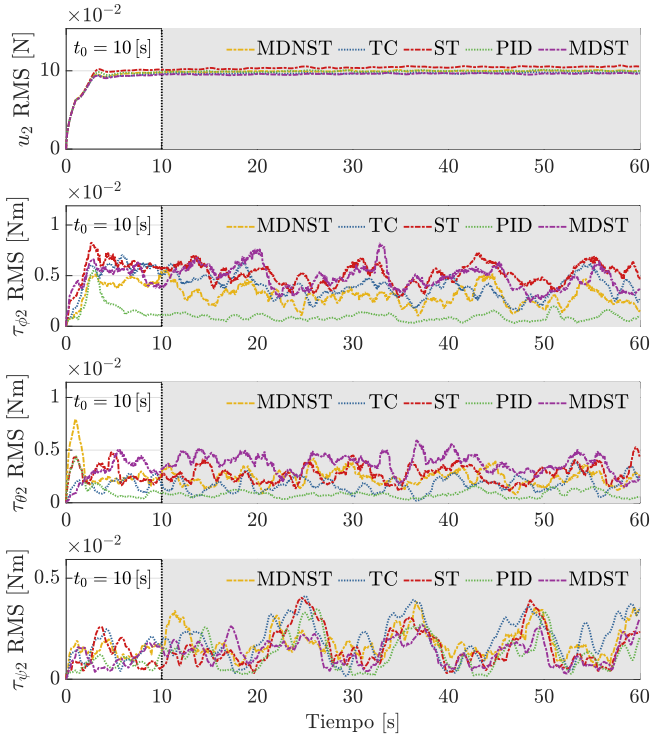


Figura 17: Entradas de control RMS del agente seguidor R_2

Tabla 7: Parámetros de los controladores.

	Parámetros					
Controlador	k_{0xi}	k_{0yi}	k_{0zi}	$k_{\phi 0i}$	$k_{\theta 0i}$	$k_{\psi 0i}$
PID	1.0	1.0	0.1	3.0	3.0	2.0
ST	1.0	1.0	0.1	0.0035	0.0035	0.0027
TC	1.0	1.0	0.1	2.0	2.0	1.0
MDST	1.0	1.0	0.1	0.0035	0.0035	0.0027
MDNST	1.0	1.0	0.1	0.1051	0.1051	10.8894
Controlador	k_{1xi}	k_{1yi}	k_{1zi}	$k_{\phi 1i}$	$k_{\theta 1i}$	$k_{\psi 1i}$
PID	10.95	10.95	12.15	14.95	14.95	12.15
ST	10.95	10.95	12.15	1.4031	1.4031	0.5293
TC	10.95	10.95	12.15	12.0	12.0	8.0
MDST	10.95	10.95	12.15	1.4031	1.4031	0.5293
MDNST	10.95	10.95	12.15	6.46	6.46	4.7247
Controlador	k_{2xi}	k_{2yi}	k_{2zi}	$k_{\phi 2i}$	$k_{\theta 2i}$	$k_{\psi 2i}$
PID	6.5	6.5	3.0	10.5	10.5	7.0
ST	6.5	6.5	3.0	0.9625	0.9625	0.8360
TC	6.5	6.5	3.0	3.0	3.0	2.0
MDST	6.5	6.5	3.0	0.9625	0.9625	0.8360
MDNST	6.5	6.5	3.0	1.6	1.6	1.0
Controlador	k_{3xi}	k_{3yi}	k_{3zi}	$k_{\phi 3i}$	$k_{\theta 3i}$	$k_{\psi 3i}$
PID	–	–	–	–	–	–
ST	–	–	–	–	–	–
TC	–	–	–	1.0	1.0	1.0
MDST	–	–	–	–	–	–
MDNST	–	–	–	–	–	–

Tabla 8: Índice de desempeño del error de x_1

Controlador	$\min(e_{x1} - \text{RMS})$	$e_{x1} - \text{RMS}$	$\max(e_{x1} - \text{RMS})$
PID	0.0018	0.0232	**0.0412**
TC	**0.0012**	0.0264	0.0420
ST	0.0036	0.0254	0.0432
MDST	**0.0012**	**0.0212**	0.0426
MDNST	0.0033	0.0250	0.0527

Tabla 9: Índice de desempeño del error de y_1

Controlador	$\min(e_{y1} - \text{RMS})$	$e_{y1} - \text{RMS}$	$\max(e_{y1} - \text{RMS})$
PID	**0.0014**	**0.0348**	**0.0612**
TC	0.0028	0.0383	0.0673
ST	0.0041	0.0363	0.0698
MDST	0.0027	0.0409	0.0816
MDNST	0.0039	0.0459	0.0821

Tabla 10: Índice de desempeño de los errores de z_1

Controlador	$\min(e_{z1} - \text{RMS})$	$e_{z1} - \text{RMS}$	$\max(e_{z1} - \text{RMS})$
PID	0.0006	0.0085	0.0331
TC	**0.00038**	0.0066	**0.0254**
ST	0.0005	0.0064	0.0296
MDST	0.00045	**0.0060**	0.0261
MDNST	0.00042	0.0065	0.0283

Tabla 11: Índice de desempeño del error de ψ_1

Controlador	$\min(e_{\psi 1} - \text{RMS})$	$e_{\psi 1} - \text{RMS}$	$\max(e_{\psi 1} - \text{RMS})$
PID	0.0032	0.0230	0.0502
TC	**0.0008**	0.0109	0.0332
ST	0.0016	0.0074	0.0179
MDST	0.0012	0.0084	**0.0151**
MDNST	0.00093	**0.0068**	0.0213

Tabla 12: Índice de desempeño de la entrada de control u_1

Controlador	$\min(u_1 - \text{RMS})$	$u_1 - \text{RMS}$	$\max(u_1 - \text{RMS})$
PID	0.0987	0.1000	0.1015
TC	0.0956	0.0971	0.0994
ST	0.0946	**0.0963**	**0.0979**
MDST	**0.0941**	0.0965	0.0982
MDNST	0.0961	0.0980	0.1000

Tabla 13: Índice de desempeño de la entrada de control $\tau_{\phi 1}$

Controlador	$\min(\tau_{\phi 1} - \text{RMS})$	$\tau_{\phi 1} - \text{RMS}$	$\max(\tau_{\phi 1} - \text{RMS})$
PID	**0.0003**	**0.0013**	**0.0025**
TC	0.0017	0.0043	0.0071
ST	0.00096	0.0037	0.0061
MDST	0.0027	0.0060	0.0085
MDNST	0.0011	0.0032	0.0053

Tabla 14: Índice de desempeño de la entrada de control $\tau_{\theta 1}$

Controlador	$\min(\tau_{\theta 1} - \text{RMS})$	$\tau_{\theta 1} - \text{RMS}$	$\max(\tau_{\theta 1} - \text{RMS})$
PID	0.00052	0.0018	**0.0029**
TC	0.00053	**0.0017**	0.0040
ST	0.0013	0.0037	0.0058
MDST	**0.0010**	0.0032	0.0053
MDNST	**0.0010**	0.0023	0.0043

Tabla 15: Índice de desempeño de la entrada de control $\tau_{\psi 1}$

Controlador	$\min(\tau_{\psi 1} - \text{RMS})$	$\tau_{\psi 1} - \text{RMS}$	$\max(\tau_{\psi 1} - \text{RMS})$
PID	0.00057	**0.0013**	0.0034
TC	**0.0002**	0.0022	0.0044
ST	0.00056	0.0024	0.0041
MDST	0.00037	**0.0013**	**0.0027**
MDNST	0.0004	0.0017	0.0037

Tabla 16: Índice de desempeño del error de x_2

Controlador	$\min(e_{x2} - \text{RMS})$	$e_{x2} - \text{RMS}$	$\max(e_{x2} - \text{RMS})$
PID	0.0025	0.0269	0.0492
TC	**0.0011**	0.0287	0.0438
ST	0.0014	**0.0218**	**0.0403**
MDST	0.0020	0.0303	0.0492
MDNST	0.0047	0.0321	0.0507

Tabla 17: Índice de desempeño del error de y_2

Controlador	$\min(e_{y2} - \text{RMS})$	$e_{y2} - \text{RMS}$	$\max(e_{y2} - \text{RMS})$
PID	**0.0006**	0.0359	0.0614
TC	0.0031	0.0399	0.0751
ST	0.0020	**0.0340**	**0.0595**
MDST	0.0024	0.0356	0.0624
MDNST	0.0017	0.0461	0.0896

Tabla 18: Índice de desempeño del error de z_2

Controlador	$\min(e_{z2} - \text{RMS})$	$e_{z2} - \text{RMS}$	$\max(e_{z2} - \text{RMS})$
PID	**0.004**	0.0078	0.0303
TC	**0.0004**	**0.0068**	0.0275
ST	**0.0004**	0.0084	0.0347
MDST	0.00058	**0.0068**	**0.0263**
MDNST	0.00054	0.0070	0.0304

Tabla 19: Índice de desempeño del error de posición ψ_2

Controlador	$\min(e_{\psi_2} - \text{RMS})$	$e_{\psi_2} - \text{RMS}$	$\max(e_{\psi_2} - \text{RMS})$
PID	0.0025	0.0198	0.0545
TC	0.0013	0.0071	0.0225
ST	**0.00095**	**0.0046**	**0.0129**
MDST	0.0011	0.0075	0.0171
MDNST	0.0016	0.0062	0.0197

Tabla 20: Índice de desempeño de la entrada de control u_2

Controlador	$\min(u_2 - \text{RMS})$	$u_2 - \text{RMS}$	$\max(u_2 - \text{RMS})$
PID	0.0981	0.0995	0.1013
TC	0.0957	0.0971	0.0996
ST	0.1010	0.1042	0.1068
MDST	**0.0943**	**0.0961**	**0.0974**
MDNST	0.0977	0.0996	0.1012

Tabla 21: Índice de desempeño de la entrada de control $\tau_{\phi 2}$

Controlador	$\min(\tau_{\phi 2} - \text{RMS})$	$\tau_{\phi 2} - \text{RMS}$	$\max(\tau_{\phi 2} - \text{RMS})$
PID	**0.0003**	**0.00093**	**0.0020**
TC	0.0016	0.0040	0.0063
ST	0.0029	0.0052	0.0072
MDST	0.0023	0.0049	0.0082
MDNST	0.0011	0.0031	0.0057

Tabla 22: Índice de desempeño de la entrada de control $\tau_{\theta 2}$

Controlador	$\min(\tau_{\theta 2} - \text{RMS})$	$\tau_{\theta 2} - \text{RMS}$	$\max(\tau_{\theta 2} - \text{RMS})$
PID	0.00026	**0.0008**	**0.0016**
TC	**0.00019**	0.0017	0.0040
ST	0.0011	0.0027	0.0053
MDST	0.0015	0.0037	0.0059
MDNST	0.0008	0.0024	0.0042

Tabla 23: Índice de desempeño de la entrada de control $\tau_{\psi 2}$

Controlador	$\min(\tau_{\psi 2} - \text{RMS})$	$\tau_{\psi 2} - \text{RMS}$	$\max(\tau_{\psi 2} - \text{RMS})$
PID	**0.00015**	**0.0013**	0.0035
TC	0.00017	0.0021	0.0041
ST	0.0003	0.0016	0.0040
MDST	0.00028	0.0013	**0.0030**
MDNST	0.00062	0.0019	0.0038

5

CONCLUSIONES

En este trabajo de tesis se proporciona una solución para abordar el problema de formación de un grupo de nano Quad-Rotors. El controlador robusto se compone de un observador por modos deslizantes en tiempo finito, controladores PIDs y por modos deslizantes continuos. Cabe destacar que, en la validación experimental no se utilizaron observadores. Además, se desarrolló una plataforma para realizar experimentos con multi-Quad-Rotors.

Los experimentos realizados validaron los siguientes controladores PID, TC, ST, MDST, y MDNST, en un sistema multi-agente de nano Quad-Rotors, considerando tres agentes, un líder virtual y dos agentes seguidores empleando los nano Quad-Rotors Crazyflie. Para demostrar la eficacia de los controladores, se realizaron diez experimentos y se obtuvo un promedio de los resultados obtenidos.

Las trayectorias de los agentes en las coordenadas x, y y z, así como el comportamiento del ángulo de guiñada ψ, indican que los controladores son capaces de llevar a cabo las tareas de formación.

Es importante destacar que, aunque los controladores demostraron comportamientos similares entre sí, la variabilidad en su rendimiento puede ser influenciada por varios factores, como la pérdida de información o el retraso en el envío de datos desde la estación terrestre a los agentes.

Las principales contribuciones de este trabajo radican en la validación experimental de los controladores y el desarrollo de la plataforma multi-Quad-Rotor.

En los resultados de la validación experimental, se observó que los controladores ST y PID mostraron el mejor rendimiento en comparación con los demás controladores validados: el ST obtuvo, en promedio, los menores errores de formación en posición y guiñada, mientras que el PID requirió el menor esfuerzo de control. Por otro lado, el controlador MDNST fue el que tuvo un peor rendimiento. Como complemento, en el Apéndice B se presenta el análisis de estabilidad completo del esquema de control propuesto. Es importante mencionar que durante las simulaciones se emplearon observadores, pero en la validación no se utilizaron. Esta diferencia en la implementación podría haber influido en los resultados y debería ser considerada en el futuro para comparar el rendimiento de los controladores.

Trabajo futuro

Con la plataforma de los nano Quad-Rotors ya en funcionamiento, es posible empezar nuevos trabajos de investigación con controladores de sistemas multi-agente (utilizando vision, inteligencia artificial, otros contro-

ladores robustos, etc.), incluyendo la implementación de los observadores y la inyección de perturbaciones externas.

PRODUCCIÓN ACADÉMICA

Artículos sometidos a Congresos Nacionales

- **Julio Cesar Rodríguez-Cervantes, Alejandro Dzul y Héctor Ríos**, *"Formation Control Design for Multi-Quad-Rotors with Experimental Validation"*, Sometido al Congreso Nacional de Control Automático 2023.
- **Julio Cesar Rodríguez-Cervantes, Alejandro Dzul y Héctor Ríos**, *"Diseño de Control de Formación basado en Modos Deslizantes para un Grupo de Quad-Rotors"*, Sometido al Congreso Mexicano de Robótica COMRob 2023.

A

PLATAFORMA MULTI-QUAD-ROTOR

La programación en ROS de los controladores basada en los trabajos representados en los repositorios *crazyflie_ros* [35] y *vrpn_client_ros*. El repositorio *crazyflie_ros* proporciona las bases de conexión del sistema de posicionamiento y el Crazyflie, así como ejemplos de vuelo en modo de regulación para un Crazyflie, entre otras aplicaciones. También incluye un controlador de posición PID el cual se ejecuta desde una estacion terrestre. El repositorio *vrpn_client_ros* contiene las bibliotecas de comunicación con el sistema de posicionamiento de VRPN, compatible con el sistema de Motion Capture de Optitrack.

Los repositorios originales tuvieron que ser actualizados, ya que al ser utilizado otro sistema de posicionamiento de VRPN, los marcos establecidos son diferentes a los marcos del sistema de captura de movimiento de Optitrack. Ademas, la programación de los controladores de posición se realiza abordo del microprocesador del nano Quad-Rotor, otro aspecto a destacar es que al estar fragmentado el código en múltiples programas, dependiendo de las características de la estación terrestre, esté ralentizaba el envío de las señales.

Parte de los trabajos realizados fue la modificación de las librerías de la antena de comunicación Crazyradio, para enviar las trayectorias deseadas con la estructura del controlador propuesto, $(x, y, z, \psi, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \dot{\psi}, \ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}, \ddot{\psi})$, ya que por defecto solo cuenta con un limitado grupo de estructuras de entradas de setpoint. Además, se migró toda la programación al lenguaje Python para tener una estandarización, y se eliminaron los códigos innecesarios. Gracias a esta modificación, fue posible realizar el control de posición a bordo del microcontrolador del nano Quad-Rotor, lo que permitió mejorar la comunicación con la estación terrestre, lográndose tener una mejor comunicación. Esto se vio reflejado notablemente en los experimentos, ya que el ruido generado por las pérdidas de señal se redujo considerablemente, además de que esta modificación extiende el uso de las tareas de formación con otro tipo de sistemas de posicionamiento, obteniéndose entonces mejoras en este sentido, dado que los repositorios originales solo está sujeto a sistemas de posicionamiento de captura de movimiento por VRPN.

Es importante destacar que se creó un nuevo repositorio, *crazyflie*, el cual se encuentra modificado para la ejecución de las pruebas experimentales presentadas en este documento. Además, se agregaron los pasos de instalación necesarios para ejecutar los experimentos presentados. Adicionalmente, se creó un segundo repositorio del firmware de los nano Quad-Rotors, *crazyflie-firmware*, que contiene los controladores de orientación y de posición presentados. Se puede acceder a ambos re-

positorios en los siguientes enlaces: `https://github.com/juliordzcer/crazyflie-firmware/` y `https://github.com/juliordzcer/crazyflie`.

El diagrama de funcionamiento de la plataforma se muestra en la Figura 18. El proceso del funcionamiento de la plataforma comienza con un programa principal, el cual se ejecuta desde una ventana de comandos en linux.

```
roslaunch crazyflie_demo LiderVirtual.launch
```

El proceso de funcionamiento es el siguiente:

1. Configuración de los parámetros iniciales:
   - Configuración de los nano Quad-Rotor: Se asigna un nombre de conexión para cada agente (por ejemplo, "crazyflie1" para el agente 1 y "crazyflie2" para el agente 2) y se definen sus posiciones iniciales y parámetros de formación en las coordenadas x, y y z.
   - Selección del controlador: Se elige entre los controladores disponibles: el controlador por modos deslizantes clásico (SMC por sus siglas en inglés de Sliding Mode Control), el controlador backstepping, TC, ST, MDNST, MDST y PID.
   - Parámetros de la trayectoria deseada: Se definen el radio de la trayectoria y la altura.
2. Inicio del programa de posicionamiento motion capture: Se conecta al servidor localizado en la dirección IP 192.168.2.10, que genera un servidor con las posiciones en tiempo real de los agentes. Este programa se ejecuta con una frecuencia de 50 Hz, pero se recomienda aumentarla a 100 Hz si solo se utiliza un agente.
3. Inicialización del líder virtual: El líder virtual espera un comando desde el joystick para iniciar su trayectoria. El programa del líder virtual, llamado LV.py, requiere las posiciones iniciales y aloja la trayectoria a seguir.
4. Inicio de la conexión con los agentes seguidores: Este proceso es igual para todos los agentes seguidores y es generado por un grupo, que contiene los programas a ejecutar para cada agente.
   - Se ejecuta el programa Crazyflie_add, que establece la conexión entre la estación terrestre y los nano Quad-Rotors, utilizando los nombres de conexión asignados previamente. Este programa tiene un tiempo de espera de 5 segundos para asegurar que la conexión sea exitosa.
   - Una vez establecida la conexión, se conecta el joystick al grupo de programas para el paro de emergencia e inicialización de las trayectorias.

- Se ejecuta el programa Setpoint.py, que conoce la posición del líder y agrega el vector de formación deseado, enviándolo al nano Quad-Rotor.
- Se ejecuta el programa VRPN.py, encargado de enviar las posiciones en tiempo real de cada agente.

Es importante mencionar que una vez establecida la conexión con los agentes, los programas interactúan entre sí en tiempo real.

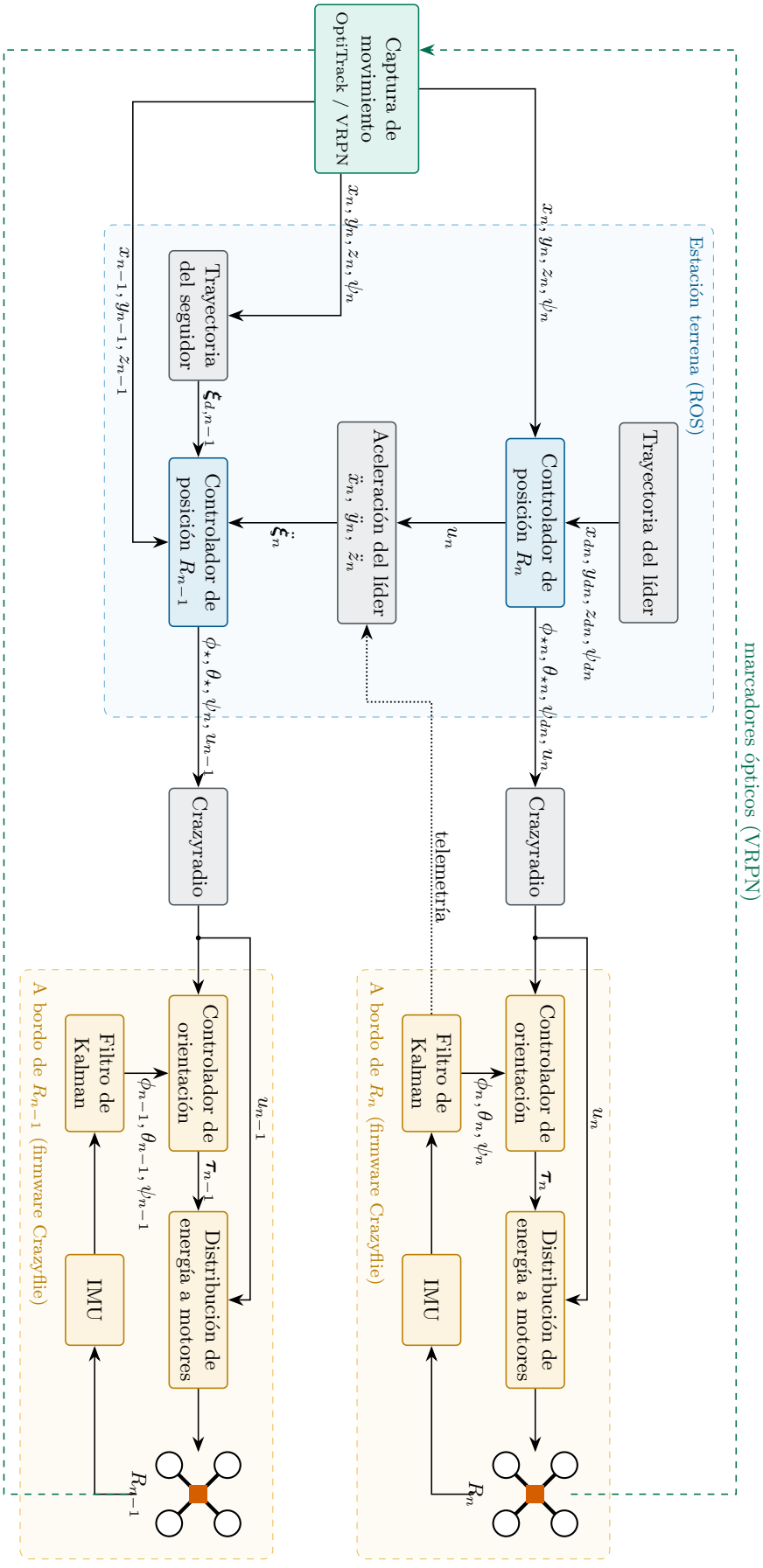


Figura 18: Plataforma ROS.

A.0.0.1 *Sistema de posicionamiento Motion Capture de Optitrack.*

El sistema de posicionamiento Motion Capture, de Optitrack, rastrea y captura movimientos en 3D. Utiliza marcadores reflectivos en los objetos y cámaras infrarrojas para detectar su posición y orientación. El software procesa los datos en tiempo real, y este los trasmite a un servidor privado por medio de VRPN (por sus siglas en inglés de *Virtual-Reality Peripheral Network*), el cual envía las posiciones y orientaciones de los objetos de interés [36].

Para iniciar el servidor VRPN del sistema de posicionamiento de Motion Capture, de Optitrack, la persona debe seguir los siguientes pasos:

1. Se inicia el software Motion Capture y se selecciona la opción *Open Camera Calibration* (ver Figura 19).

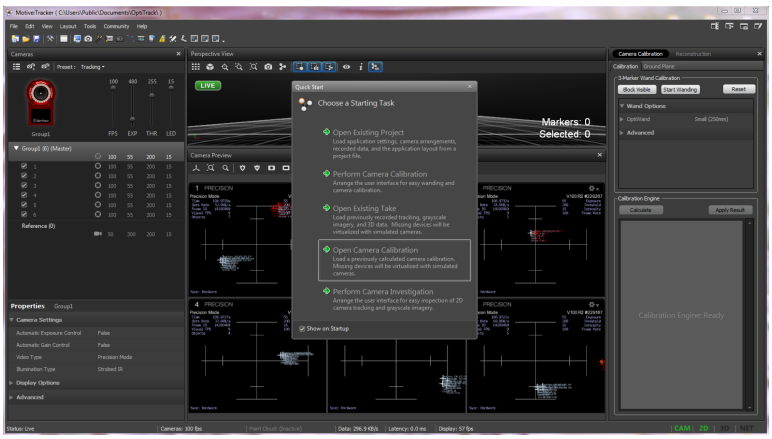


Figura 19: Software Motive

2. Selecciona el archivo de la calibración más reciente (ver Figura 20).

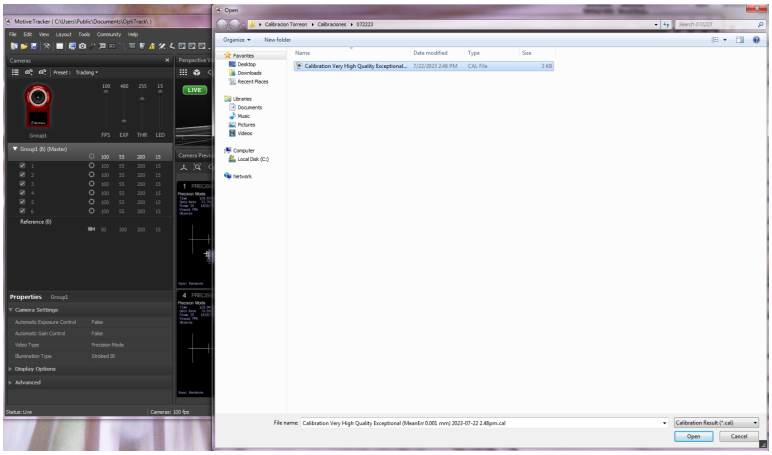


Figura 20: Selección de Calibración.

3. Selecciona los marcadores de los agentes (ver Figura 21). Una vez seleccionados, los marcadores se representan como en la Figura 22.

Es importante verificar que estén seleccionados todos los marcadores del agente.

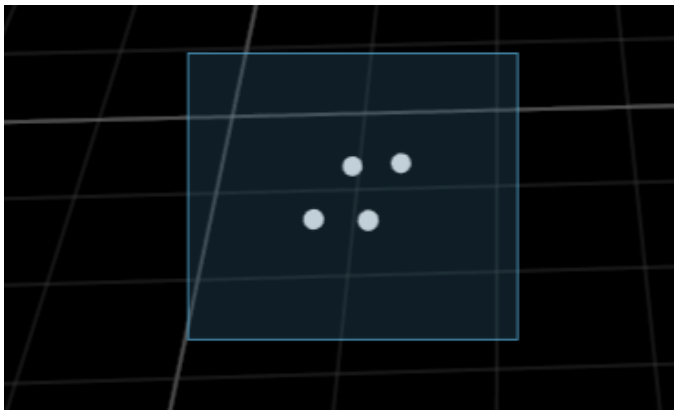


Figura 21: Selección de marcadores

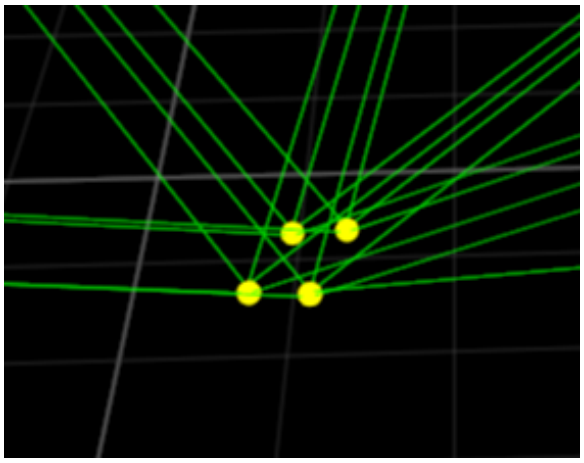


Figura 22: Marcadores seleccionados

4. Se presiona clic derecho *Rigid Body* y luego *Create From Selected Markers*(ver Figura 23).

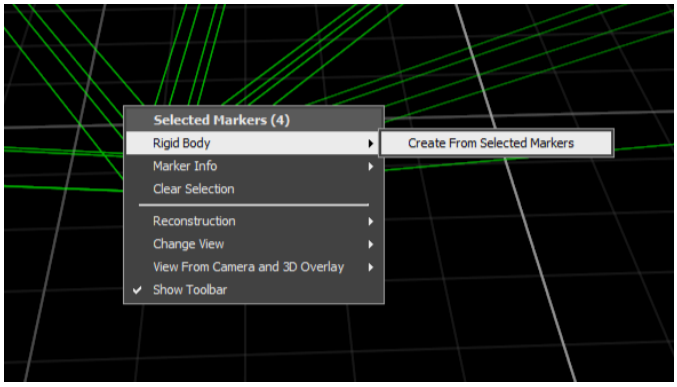


Figura 23: Crear un cuerpo rígido

5. Se cambia el nombre de los cuerpos rígidos por *crazyflie1* y *crazyflie2*. En caso de haber más agentes, se continúa con *crazyflie3* y así sucesivamente (ver Figura 24).

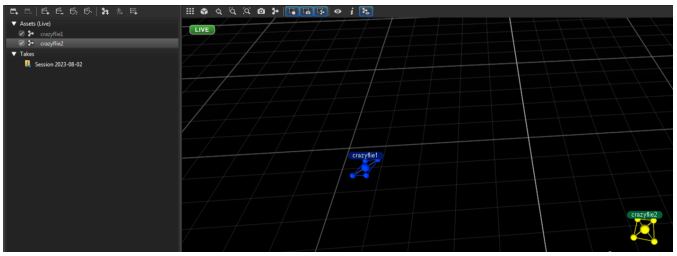


Figura 24: Renombrar los cuerpos rígidos con el nombre de los agentes

6. Para iniciar el servidor, se debe seleccionar la opción *Streaming Pane*, que se encuentra en la parte superior izquierda y despliega una ventana en la parte derecha de la pantalla (ver Figura 25).

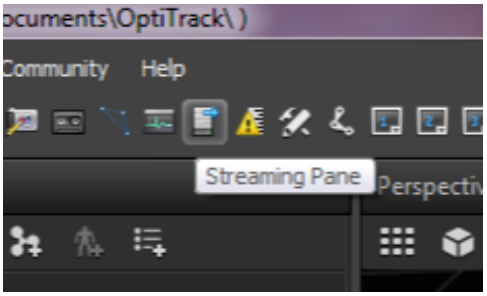


Figura 25: Opción de Streaming Pane

7. Finalmente, se debe seleccionar la opción *Broadcast Frame Data* ubicada en *VRPN Streaming Engine* (ver Figura 26).

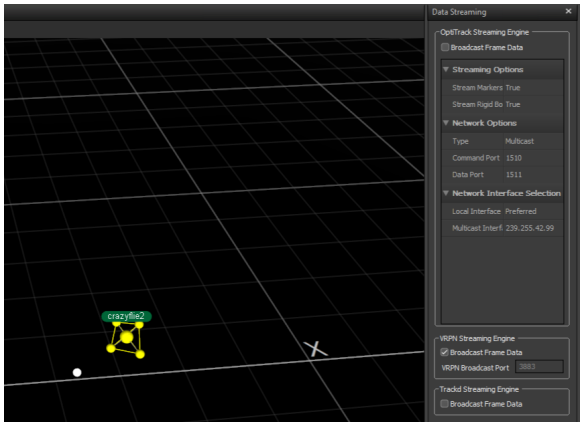


Figura 26: Iniciar Servidor VRPN

Siguiendo estos pasos, el usuario habrá iniciado el servidor VRPN y estará listo para utilizar el sistema de posicionamiento Motion Capture de Optitrack.

La posición de los marcadores de cada agente debe distribuirse de manera diferente y no simétrica. Si los marcadores se encuentran posicionados de la misma forma o de manera simétrica, es posible que el sistema de cámaras proporcione un posicionamiento incorrecto. Por lo tanto, es esencial asegurarse de que los marcadores estén colocados de manera única y no simétrica para obtener mediciones precisas y confiables del sistema de Motion Capture. En la Figura 27 se muestra un ejemplo de distribucion de un agente



Figura 27: Distribución de marcadores

A.0.0.2 *Estación terrestre*

Para la ejecución de los experimentos, es necesario una computadora que cuente con Ubuntu 20.04 y con el software ROS; una de las fortalezas de ROS en el desarrollo de algoritmos para robots, es que este es un sistema agnóstico, ya que se puede utilizar con múltiples lenguajes de programación (C++, Python y Java); es ampliamente utilizado en la investigación y desarrollo de robots en diversas áreas, como robótica móvil, manipulación de brazos robóticos, visión por computadora y robótica industrial. También cuenta con una gran comunidad de usuarios y desarrolladores que contribuyen con paquetes y herramientas adicionales, lo que lo convierte en un ecosistema dinámico y en constante crecimiento [37].

Para utilizar la plataforma experimental es necesario tener conocimientos de ROS implementado en Python y C++, ya que los programas que generan las trayectorias deseadas y que envían la posición en tiempo real al nano Quad-Rotor, están implementados por medio de Python y C++ con ROS.

A.0.0.3 *Crazyflie*

El Crazyflie (ver en Figura 28) ha ganado popularidad en el ámbito de la robótica y la investigación debido a su diseño compacto y su versatilidad. Gracias a su tamaño reducido, puede maniobrar en espacios estrechos y

confinados, lo que lo convierte en una opción ideal para tareas de formación y tareas de mapeo de áreas reducidas.

Además de su diseño modular, esto le brinda la capacidad de agregar sensores adicionales según las tareas a realizar. Entre ellos se encuentran módulos de detección de proximidad, cámaras de alta resolución, sensores inerciales avanzados y otros dispositivos que permiten llevar a cabo investigaciones y proyectos cada vez más sofisticados.

El uso de Crazyflie en investigaciones de tareas cooperativas ha demostrado ser altamente beneficioso. Al ser robots pequeños y ágiles, pueden colaborar de manera eficiente en grupos para abordar problemas complejos y realizar tareas colaborativas.

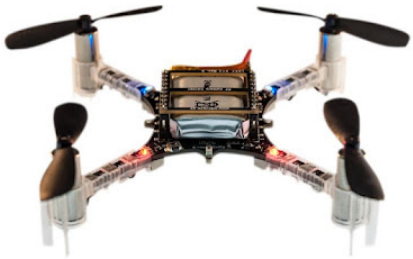


Figura 28: Crazyflie

A.1 RPM A NEWTONS

Debido a que la entrada de las señales de control del Quad-Rotor Crazyflie se encuentra en unidades de medida de RPM, y los controladores presentados en este trabajo de tesis están representados en unidades de medida en Newtons, se desarrollaron cálculos experimentales para establecer una relación entre RPM y Newtons. Dicha relación se encuentra descrita en el trabajo de investigación titulado "System Identication of the Crazyie 2.0 Nano Quadrocopter" [34], donde se lleva a cabo la identificación de los parámetros del nano Quad-Rotor Crazyflie 2.0. La función que representa dicha relación está dada por:

$$f_i = 2.130295 \times 10^{-11} \cdot cmd_i^2 + 1.032633 \times 10^{-6} \cdot cmd_i + 5.484560 \times 10^{-4} \tag{20}$$

donde f_i es el empuje generado por cada motor i y cmd_i es la entrada enviada al motor i; la gráfica de está función se muestra en la Figura 29.

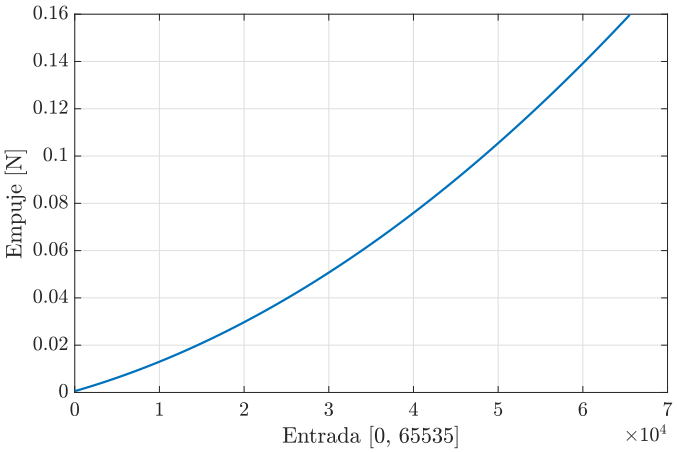


Figura 29: Gráfica de la relación RPM-Newtons

B

ANÁLISIS DE ESTABILIDAD (MATERIAL COMPLEMENTARIO, 2026)

Este apéndice fue escrito en 2026 como material complementario y no forma parte de la tesis defendida en agosto de 2023. Completa el argumento de estabilidad que en el Capítulo 3 solo se esbozó en el Teorema 1, el cual remitía a Ríos et al. [24] para la demostración. Las ecuaciones de este apéndice continúan la numeración de la tesis, de modo que las referencias a (1)–(20) corresponden a los capítulos anteriores. Las demostraciones siguen la metodología de Ríos et al. [24] y de los demás trabajos citados. Cuando una función de Lyapunov o una condición de ganancia proviene de una referencia, se cita y no se vuelve a deducir.

B.1 ALCANCE Y CORRECCIONES

Al contrastar la tesis con los controladores implementados y con el modelo (4) se encontraron las siguientes erratas, que ya están corregidas en esta versión de la tesis. Las formas corregidas son las que se utilizan en lo que sigue.

- (8b) debe leerse $\nu_y = u_m(\cos\phi^\star \sin\theta^\star \sin\psi_d - \sin\phi^\star \cos\psi_d)$. Esta es la segunda componente de $g_\xi(\eta)u_m$ y es consistente con (9b).
- (8c) debe leerse $\nu_z = u_m \cos\phi^\star \cos\theta^\star - g$. Esta es la tercera componente de $g_\xi(\eta)u_m - \mathbf{G}$ y es consistente con (9a).
- (17) debe leerse $s = e + k_0 \lceil \varepsilon \rfloor^{3/2}$. Con pesos $(3, 2, 1)$ para (e, ε, ν), el término $\lceil \varepsilon \rfloor^{3/2}$ tiene peso 3, igual al de e. Cualquier otro exponente hace que s no sea homogéneo. Esta es también la forma implementada en el firmware.
- (14): el ST implementado es $s = \varepsilon + k_0 e$, $\bar\tau = \nu - k_1 \lceil s \rfloor^{1/2}$, $\dot\nu = -k_2 \lceil s \rfloor^0$, sin término $-k_0\varepsilon$ en $\bar\tau$. Entonces $\dot s = \bar\tau + k_0\varepsilon$, por lo que $k_0\varepsilon$ actúa como una perturbación dependiente del estado del ST estándar. Esto se trata en la Proposición B.3, y el resultado es regional y no global.

B.2 MODELO, NOTACIÓN Y SUPOSICIONES PERMANENTES

$\lceil s \rfloor^\gamma := |s|^\gamma \operatorname{sign}(s)$ y $\lceil s \rfloor^0 := \operatorname{sign}(s)$. Las clases $\mathcal{K}$, $\mathcal{KL}$ y $\mathcal{KL}_T$ (esta última se anula en tiempo finito) y las propiedades se utilizan como sigue: ISS como en Sontag [38]; UE y UEE como en Khalil [39]; las nociones en tiempo finito UETF, GUETF y FT-ISS como en Bhat y Bernstein [40] y Bernuau et al. [41]. El índice de agente i se omite cuando no hay ambigüedad. El

agente n es el líder y $j = 1, \dots, n-1$ son los seguidores. El grafo es una estrella centrada en el líder. Cada agente obedece (4):

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \xi_2, \quad \dot{\xi}_2 = g_\xi(\eta_1)u_m - \mathbf{G} - \Lambda_\xi \xi_2 + \mathbf{d}_\xi(t), \\ \dot{\eta}_1 &= \eta_2, \quad \dot{\eta}_2 = J\tau + \Xi w_\eta(\eta_2) - \Lambda_\eta \eta_2 + \mathbf{d}_\eta(t), \end{aligned} \tag{21}$$

con $\xi_1 = (x, y, z)$, $\eta_1 = (\phi, \theta, \psi)$, $\mathbf{G} = (0, 0, g)$, $u_m = u/m$, y

$$g_\xi(\eta_1) = \begin{pmatrix} \cos\phi \sin\theta \cos\psi + \sin\phi \sin\psi \\ \cos\phi \sin\theta \sin\psi - \sin\phi \cos\psi \\ \cos\phi \cos\theta \end{pmatrix}. \tag{22}$$

Sean $\hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2, \hat{\xi}_3, \hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2, \hat{\eta}_3$ los estados del FT-SMO (5). Los desplazamientos $C_{n,j}$ son constantes. Se define $\xi_{dj} := \xi_{1n} + C_{n,j}$ para los seguidores y $\xi_{dn} := \xi_d$ para el líder. Se define $\psi_{dj} := \psi_n$ y $\psi_{dn} := \psi_d$. Los errores son

$$e_\xi = \xi_1 - \xi_d, \quad \varepsilon_\xi = \hat{\xi}_2 - \dot{\xi}_d, \quad e_\eta = \eta_1 - \eta_d, \quad \varepsilon_\eta = \hat{\eta}_2 - \dot{\eta}_d, \tag{23}$$

con $\eta_d = (\phi^\star, \theta^\star, \psi_d)$. Para un seguidor $\dot{\xi}_d = \xi_{2n}$. El control virtual es $w_\xi := g_\xi(\eta_1)u_m - \mathbf{G} - \nu$. Las referencias son

$$\begin{aligned} u_m &= \sqrt{\nu_x^2 + \nu_y^2 + (\nu_z + g)^2}, \\ \phi^\star &= \arcsin\!\left[u_m^{-1}(\nu_x \sin\psi_d - \nu_y \cos\psi_d)\right], \\ \theta^\star &= \arctan\!\left[(\nu_z + g)^{-1}(\nu_x \cos\psi_d + \nu_y \sin\psi_d)\right]. \end{aligned} \tag{24}$$

El control (10) es

$$\nu = \bar{\nu} + \Lambda_\xi \xi_2 + \ddot{\xi}_d - \hat{\xi}_3, \qquad \tau = J^{-1}\left(\bar{\tau} - \Xi w_\eta + \Lambda_\eta \eta_2 + \ddot{\eta}_d - \hat{\eta}_3\right), \tag{25}$$

donde $\bar{\nu}_q = k_{0q}\int e_q + k_{1q} e_q + k_{2q}\varepsilon_q$ para $q = x, y, z$ (11), y cada matriz compañera

$$A_q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ k_{0q} & k_{1q} & k_{2q} \end{pmatrix} \tag{26}$$

es Hurwitz (12). Dado que el polinomio característico de A_q es $s^3 - k_{2q}s^2 - k_{1q}s - k_{0q}$, por el criterio de Routh–Hurwitz A_q es Hurwitz si y solo si $k_{0q}, k_{1q}, k_{2q} < 0$ y $k_{1q}k_{2q} > -k_{0q}$, con la convención e = medición − referencia usada aquí; con la convención opuesta e = referencia − medición, como en el firmware de vuelo, las mismas ganancias aparecen con signo positivo. Lo mismo se cumple para el PID de orientación (13). Los controladores de orientación $\bar{\tau}_l$, $l = \phi, \theta, \psi$, son (a) PID (13), (b) ST (14, tal como se implementa), (c) twisting continuo (15), (d) MDST (16) y (e) MDNST (17, corregido).

Suposición A1. *Suposiciones 3–4 de la tesis: las trayectorias deseadas son C^∞ y acotadas junto con sus derivadas hasta orden cuatro (necesario para $\ddot{\xi}_d$ y, a través de (24), para $\ddot{\eta}_d$), y las perturbaciones $\mathbf{d}_\xi, \mathbf{d}_\eta$ están acotadas uniformemente y son Lipschitz con cotas conocidas.*

Suposición A2. $\nu_z + g > 0$ *a lo largo de las soluciones (por ejemplo, saturando* $\bar{\nu}_z$*), de modo que* $\theta^\star$ *está bien definido y* $u_m > 0$*. El ángulo* $\phi^\star$ *siempre está bien definido, ya que por Cauchy–Schwarz* $(\nu_x \sin\psi_d - \nu_y \cos\psi_d)^2 \leqslant (\nu_x^2 + \nu_y^2)(\sin^2\psi_d + \cos^2\psi_d) \leqslant u_m^2$.

Suposición A3. *El empuje está acotado:* $u_{mi} \leqslant \bar{u}$.

Suposición A4. *Las señales de prealimentación* $\ddot{\xi}_{di}$ *(para los seguidores, la aceleración del líder, transmitida o estimada) y* $\ddot{\eta}_{di}$ *están disponibles y acotadas.*

Suposición A5. *Las soluciones del lazo cerrado, incluidos los estados del observador y del controlador, existen y permanecen acotadas en* $[0, T_0]$ *(sin escape finito).*

Plausibilidad de A5 (no es una demostración). En $[0, T_0]$ los términos de cancelación en (25) que involucran ξ_2, η_2 usan los estados medidos, por lo que la forzante residual consiste en perturbaciones y errores de estimación. Estos están acotados por A1 y el Lema B.2. El lazo de posición es $\ddot{\xi} = g_\xi u_m - \mathbf{G} - \Lambda_\xi \dot{\boldsymbol{\xi}} + \mathbf{d}_\xi$, un sistema lineal excitado por una entrada acotada (A3), por lo que no puede escapar en tiempo finito. En cada controlador de orientación $\bar{\tau}$ tiene a lo sumo crecimiento lineal en (e, ε, ν), porque las potencias fraccionarias son sublineales y $\dot{\nu}$ es lineal o acotada. Un sistema con lado derecho linealmente acotado y forzante acotada no tiene escape finito. Este es el argumento estándar de Ríos et al. [24]. Se mantiene como suposición porque (5) no se reproduce aquí.

Lema B.1 (orientación de referencia)**.** *Bajo A2,* (24) *da* $\phi^\star \in [-\pi/2, \pi/2]$, $\theta^\star \in (-\pi/2, \pi/2)$*, y* $g_\xi(\boldsymbol{\eta}_d) u_m - \mathbf{G} = \boldsymbol{\nu}$ *con* $\boldsymbol{\eta}_d = (\phi^\star, \theta^\star, \psi_d)$.

Demostración. Sea $a = \nu_x \cos\psi_d + \nu_y \sin\psi_d$, $b = \nu_z + g > 0$ y $c = \nu_x \sin\psi_d - \nu_y \cos\psi_d$, de modo que $u_m^2 = a^2 + b^2 + c^2$. Entonces $\sin\phi^\star = c/u_m$ y, dado que $\cos\phi^\star \geqslant 0$, $\cos\phi^\star = \sqrt{a^2 + b^2}/u_m$. Además $\tan\theta^\star = a/b$ con $\cos\theta^\star > 0$ da $\cos\theta^\star = b/\sqrt{a^2 + b^2}$ y $\sin\theta^\star = a/\sqrt{a^2 + b^2}$. Por lo tanto $u_m \cos\phi^\star \cos\theta^\star = b$ y $u_m \cos\phi^\star \sin\theta^\star = a$. De (22), la primera componente de $g_\xi(\boldsymbol{\eta}_d) u_m$ es

$$u_m \cos\phi^\star \sin\theta^\star \cos\psi_d + u_m \sin\phi^\star \sin\psi_d = a\cos\psi_d + c\sin\psi_d = \nu_x,$$

y la segunda es $a\sin\psi_d - c\cos\psi_d = \nu_y$. La tercera es igual a $b = \nu_z + g$. □

B.3 OBSERVADOR Y LAZO CERRADO PARA $t \geqslant T_0$

Lema B.2 (FT-SMO, citado)**.** *Bajo A1 existen ganancias del observador de tercer orden (5), con inyecciones* $\lceil\cdot\rfloor^{2/3}, \lceil\cdot\rfloor^{1/3}, \lceil\cdot\rfloor^{0}$ *elegidas a partir de las cotas de Lipschitz de* $\mathbf{d}_\xi, \mathbf{d}_\eta$*, tales que el error de estimación es UETF. Por lo tanto existe un* T_0 *finito, acotado para errores de estimación iniciales acotados, con* $\hat{\xi}_1 = \xi_1$, $\hat{\xi}_2 = \xi_2$, $\hat{\xi}_3 = \mathbf{d}_\xi$, $\hat{\eta}_1 = \eta_1$, $\hat{\eta}_2 = \eta_2$, $\hat{\eta}_3 = \mathbf{d}_\eta$ *para* $t \geqslant T_0$ *(6).*

Las ecuaciones y ganancias del observador son las de (5); coinciden con el FT-SMO de Ríos et al. [42] y Ríos et al. [24, Teorema 1], donde se demuestra

este resultado (véase también [43]). No se repite aquí. La dinámica del error está excitada únicamente por la derivada de la perturbación, que está acotada por A1.

Para $t \geqslant T_0$ se tiene $\varepsilon_\xi = \xi_2 - \dot{\xi}_d$ y, por la definición de w_ξ, $g_\xi u_m - G = \nu + w_\xi$. Sustituyendo (25) en la dinámica del error (7) se obtiene

$$\dot{e}_\xi = \varepsilon_\xi, \quad \dot{\varepsilon}_\xi = \bar{\nu} + w_\xi, \qquad \dot{e}_\eta = \varepsilon_\eta, \quad \dot{\varepsilon}_\eta = \bar{\tau}. \tag{27}$$

En efecto $\dot{\varepsilon}_\xi = \nu + w_\xi - \Lambda_\xi \xi_2 + d_\xi - \ddot{\xi}_d = \bar{\nu} + w_\xi + (d_\xi - \hat{\xi}_3)$, y $\dot{\varepsilon}_\eta = \bar{\tau} + (d_\eta - \hat{\eta}_3)$ después de que los términos Ξw_η, $\Lambda_\eta \eta_2$, $\ddot{\eta}_d$ se cancelan. Los últimos corchetes se anulan para $t \geqslant T_0$. Nótese que el subsistema $(e_\eta, \varepsilon_\eta)$ no depende de los estados de posición. Esto se basa en el uso exacto de $\ddot{\eta}_d$ en (25) (A4), y es lo que hace que el esquema sea en cascada. Nótese que η_d en sí depende de los estados de posición a través de ν; lo que es independiente de ellos es la dinámica del error de $(e_\eta, \varepsilon_\eta)$, siempre que $\ddot{\eta}_d$ esté disponible (A4).

Lema B.3 (cota de acoplamiento)**.** *Bajo A2–A3,* $w_\xi = \big(g_\xi(\eta_1) - g_\xi(\eta_d)\big)u_m$ *y* $\|w_\xi\| \leqslant L_g \bar{u} \|e_\eta\|$ *con* $L_g = 6$.

Demostración. Por el Lema B.1, $\nu = g_\xi(\eta_d)u_m - G$, lo que da la identidad. Cada derivada parcial de una componente de g_ξ es una suma de a lo sumo dos productos de senos y cosenos (por ejemplo $\partial_\phi g_{\xi,1} = -\sin\phi\sin\theta\cos\psi + \cos\phi\sin\psi$ y $\partial_\theta g_{\xi,1} = \cos\phi\cos\theta\cos\psi$), por lo que su magnitud es a lo sumo 2. Por lo tanto, $\|\partial g_\xi/\partial\eta\|_2 \leqslant \|\partial g_\xi/\partial\eta\|_F \leqslant \sqrt{9\cdot 4} = 6$. Dado que $\mathbb{R}^3$ es convexa, $g_\xi(\eta_1) - g_\xi(\eta_d) = \int_0^1 \frac{\partial g_\xi}{\partial \eta}(\eta_d + s e_\eta)\,ds\, e_\eta$, y $u_m \leqslant \bar{u}$ completa la demostración. □

B.4 LAZO DE POSICIÓN

Proposición B.1 (ISS con respecto a e_η)**.** *Sean* $t_0 \geqslant T_0$ *y* $q \in \{x, y, z\}$. *Con* $\chi_q = (\int e_q, e_q, \varepsilon_q)^\top$ *y* $B = (0,0,1)^\top$, *el lazo cerrado* (27) *da* $\dot{\chi}_q = A_q\chi_q + B\,w_q$, *donde* w_q *es la* q*-ésima componente de* w_ξ. *Existen* $\kappa \geqslant 1$ *y* $\lambda > 0$, *que dependen solo de* A_q, *tales que para* $t \geqslant t_0$

$$\|\chi_q(t)\| \leqslant \kappa e^{-\lambda(t-t_0)}\|\chi_q(t_0)\| + \frac{\kappa}{\lambda} L_g \bar{u}\, \|e_\eta\|_\infty, \tag{28}$$

con $\|e_\eta\|_\infty = \sup_{[t_0,t]}\|e_\eta\|$. *Si* $e_\eta \equiv 0$ *en* $[t_1, \infty)$, *entonces*

$$\|\chi_q(t)\| \leqslant \kappa e^{-\lambda(t-t_1)}\|\chi_q(t_1)\|,$$

es decir, el lazo de posición es exponencialmente estable una vez que su entrada e_η *se anula.*

Demostración. De $\frac{d}{dt}\int e_q = e_q$, $\dot{e}_q = \varepsilon_q$ y $\dot{\varepsilon}_q = \bar{\nu}_q + w_q = k_{0q}\int e_q + k_{1q}e_q + k_{2q}\varepsilon_q + w_q$ se obtiene $\dot{\chi}_q = A_q\chi_q + Bw_q$. Dado que A_q es Hurwitz, $\|e^{A_q t}\| \leqslant \kappa e^{-\lambda t}$ para algún $\kappa \geqslant 1$, $\lambda > 0$ [39]. La variación de constantes da

$$\chi_q(t) = e^{A_q(t-t_0)}\chi_q(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{A_q(t-s)} B w_q(s)\, ds.$$

Dado que $\|B\| = 1$, $|w_q| \leqslant \|\boldsymbol{w}_\xi\| \leqslant L_g \bar{u} \|e_\eta\|$ por el Lema B.3, y $\int_{t_0}^{t} e^{-\lambda(t-s)} ds \leqslant 1/\lambda$, se sigue la estimación (28). Si $e_\eta \equiv 0$ en $[t_1, \infty)$, entonces $w_q \equiv 0$ allí y solo permanece el primer término de la fórmula de variación de constantes. □

B.5 LAZO DE ORIENTACIÓN

Para un campo vectorial F y pesos $r = (r_1, \ldots, r_m) > 0$, la homogeneidad de grado q significa

$$F_k(\lambda^{r_1} x_1, \ldots, \lambda^{r_m} x_m) = \lambda^{r_k + q} F_k(x) \quad \text{para todo } \lambda > 0.$$

Los sistemas discontinuos se entienden en el sentido de Filippov, con $\lceil s \rfloor^0$ reemplazado por la función multivaluada sign. Se utilizan dos hechos de Bernuau et al. [41]. (H1) Un sistema homogéneo de grado negativo que es globalmente asintóticamente estable (GAS) es GUETF. (H2) Para $\dot{x} = F(x, w)$ homogéneo de grado q con pesos r para x y $\tilde{r}$ para w, la estabilidad asintótica global en $w = 0$ y $\min \tilde{r} > 0$ implican ISS, y si además $q < 0$ el sistema es FT-ISS.

Para un canal l se escribe e, ε, τ, y ν denota el estado del controlador. Para $t \geqslant T_0$ el canal satisface $\dot{e} = \varepsilon$, $\dot{\varepsilon} = \bar{\tau}$ por (27).

Proposición B.2 (lazo de orientación, controladores a, c, d, e)**.** *Sea $t_0 \geqslant T_0$ y suponga que las ganancias satisfacen las condiciones de las referencias citadas.*

a) PID: con $\chi = (\int e, e, \varepsilon)$, $\dot{\chi} = A\chi$ y $\|\chi(t)\| \leqslant \kappa e^{-\lambda(t-t_0)} \|\chi(t_0)\|$ (GUEE).

c) TC: $x = (e, \varepsilon, \nu) = 0$ es GUETF, con tiempo de establecimiento $T \leqslant 5V(x_0)^{1/5}/\kappa_V$.

d) MDST: $x = 0$ es GUETF, con tiempo de establecimiento $T \leqslant 4V(x_0)^{1/4}/\kappa_V$.

e) MDNST: $x = 0$ es GUETF.

f) Para c–e, con $\dot{\varepsilon} = \bar{\tau} + \rho(t)$ y ρ medible y esencialmente acotada, el sistema es FT-ISS con respecto a ρ.

Demostración. a) $\dot{\chi} = A\chi$ con A Hurwitz (13), por lo que

$$\|\chi(t)\| = \|e^{A(t-t_0)}\chi(t_0)\| \leqslant \kappa e^{-\lambda(t-t_0)} \|\chi(t_0)\| \quad \text{para todo } \chi(t_0).$$

c) El lazo cerrado es

$$\dot{e} = \varepsilon, \quad \dot{\varepsilon} = \nu - k_0 \lceil e \rfloor^{1/3} - k_1 \lceil \varepsilon \rfloor^{1/2}, \quad \dot{\nu} \in -k_2 \operatorname{sign}(e) - k_3 \operatorname{sign}(\varepsilon).$$

Tómense pesos $(3, 2, 1)$ para (e, ε, ν) y grado $q = -1$. Entonces $\dot{e} = \varepsilon$ escala como $\lambda^2 = \lambda^{3+q}$, y en $\dot{\varepsilon}$ los términos ν, $\lceil e \rfloor^{1/3}$, $\lceil \varepsilon \rfloor^{1/2}$ escalan como $\lambda^1 = \lambda^{2+q}$. Los términos de signo en $\dot{\nu}$ escalan como $\lambda^0 = \lambda^{1+q}$. Así, el sistema es homogéneo de grado -1. Para ganancias que satisfacen las

condiciones de Torres-González et al. [26], véase también Ríos et al. [24], una función de Lyapunov definida positiva y radialmente no acotada

$$V = \beta_1|e|^{5/3} + \beta_2 e\varepsilon + \beta_3|\varepsilon|^{5/2} + \beta_4 e\lceil\nu\rfloor^2 - \beta_5\varepsilon\nu^3 + \beta_6|\nu|^5, \qquad \beta_i > 0,$$

homogénea de grado 5, se construye allí con $\dot{V} \leqslant -\kappa_V V^{4/5}$ a lo largo de las soluciones. Esto da GUETF. Además $\frac{d}{dt}V^{1/5} = \frac{1}{5}V^{-4/5}\dot{V} \leqslant -\kappa_V/5$ mientras que $V > 0$, por lo que V se anula a más tardar en $T \leqslant 5V(x_0)^{1/5}/\kappa_V$.

d) En las coordenadas $x = (e, \varepsilon, \nu)$ con $s = \varepsilon + k_0\lceil e\rfloor^{2/3}$ el lazo cerrado es

$$\dot{e} = \varepsilon, \quad \dot{\varepsilon} = \nu - k_1\lceil s\rfloor^{1/2}, \quad \dot{\nu} \in -k_2\,\mathrm{sign}(s).$$

La variable s tiene peso 2, ya que ε tiene peso 2 y $\lceil e\rfloor^{2/3}$ tiene peso $3\cdot\frac{2}{3} = 2$. Por lo tanto, $\lceil s\rfloor^{1/2}$ tiene peso $1 = 2 + q$ y el término de signo tiene peso $0 = 1 + q$. El sistema es homogéneo de grado -1 con pesos $(3, 2, 1)$. El lazo cerrado en (e, ε, ν) es discontinuo, debido al término $\mathrm{sign}(s)$, y se entiende en el sentido de Filippov; no contiene términos singulares, ya que solo aparece $\lceil e\rfloor^{2/3}$ y no su derivada. La función de Lyapunov a continuación es continua pero no diferenciable en $\{e = 0\}$; su decrecimiento se establece en los trabajos citados con análisis no suave. Para ganancias que satisfacen las condiciones de Fridman et al. [27], véase también Ríos et al. [24], la forma cuadrática $V = \zeta^\top P\zeta$ con $P = P^\top > 0$ y $\zeta = (\lceil e\rfloor^{2/3}, s, \lceil\nu\rfloor^2)$, cuyas entradas tienen todas peso 2, por lo que V tiene grado 4, satisface $\dot{V} \leqslant -\kappa_V V^{3/4}$. Como en c), esto da GUETF y $T \leqslant 4V(x_0)^{1/4}/\kappa_V$.

e) Con la (17) corregida, $s = e + k_0\lceil\varepsilon\rfloor^{3/2}$, el lazo cerrado es

$$\dot{e} = \varepsilon, \quad \dot{\varepsilon} = \nu - k_1\lceil s\rfloor^{1/3}, \quad \dot{\nu} \in -k_2\,\mathrm{sign}(s).$$

Para pesos $(3, 2, 1)$ el término $\lceil\varepsilon\rfloor^{3/2}$ tiene peso $2\cdot\frac{3}{2} = 3$, igual al peso de e, por lo que s es homogéneo de peso 3. Entonces $\lceil s\rfloor^{1/3}$ tiene peso $1 = 2 + q$, $\dot{e} = \varepsilon$ tiene peso $2 = 3 + q$, y el término de signo tiene peso $0 = 1 + q$. El sistema es homogéneo de grado -1. Este es exactamente el controlador por modos deslizantes terminal continuo de Kamal et al. [28], $u = -k_1 L^{2/3}\lceil\phi_L\rfloor^{1/3} + z$, $\dot{z} = -k_2 L\lceil\phi_L\rfloor^0$ con $\phi_L = x_1 + \alpha L^{-1/2}\lceil x_2\rfloor^{3/2}$. Para ganancias que satisfacen sus condiciones, Kamal et al. [28, Teorema 1] construyen una función de Lyapunov continuamente diferenciable, homogénea y estricta, lo que demuestra GUETF. La función no se reproduce aquí.

f) La perturbación ρ entra en la ecuación de ε, cuyo escalamiento ponderado es $\lambda^{2+q} = \lambda^1$. Asignando a ρ el peso $\tilde{r} = 1$, el sistema perturbado $F(x, \rho)$ es homogéneo de grado -1 en el sentido de (H2). Dado que $\min\tilde{r} = 1 > 0$, $q < 0$, y el sistema no perturbado es GAS por c)–e), (H2) da FT-ISS: existen $\beta \in \mathcal{KL}_T$ y $\gamma \in \mathcal{K}$ con $\|x(t)\| \leqslant \beta(\|x(t_0)\|, t - t_0) + \gamma(\|\rho\|_\infty)$. □

Observación B.1. En c)–f), un residual de compensación acotado, por ejemplo $\rho = \mathbf{d}_\eta - \hat{\boldsymbol{\eta}}_3$ en $[0, T_0]$ (acotado en $[0, T_0]$ por A5), deja el estado de orientación acotado por $\gamma(\|\rho\|_\infty)$ más un término decreciente. Las perturbaciones que entran por el canal de ν tienen peso 0 y no están cubiertas por (H2). Se tratan en los trabajos citados mediante condiciones de ganancia para perturbaciones Lipschitz, que no se repiten aquí.

Proposición B.3 (ST tal como se implementa)**.** *Considere el controlador b):* $s = \varepsilon + k_0 e$, $\bar{\tau} = \nu - k_1 \lceil s \rfloor^{1/2}$, $\dot{\nu} = -k_2 \lceil s \rfloor^0$, *con* $k_0, k_1, k_2 > 0$. *Sea* $\bar{\nu} := \nu + k_0 \varepsilon$. *Para* $t \geqslant T_0$,

$$\dot{s} = -k_1 \lceil s \rfloor^{1/2} + \bar{\nu}, \qquad \dot{\bar{\nu}} = -k_2 \lceil s \rfloor^0 + k_0 \bar{\tau}.$$

Sea $K \subset \mathbb{R}^3$ *compacto y sea* $\rho_K := k_0 \, \max_{(e,\varepsilon,\nu)\in K} |\nu - k_1 \lceil \varepsilon + k_0 e \rfloor^{1/2}|$. *Suponga que* k_1, k_2 *satisface las condiciones de ganancia del algoritmo super-twisting para una perturbación Lipschitz con constante* ρ_K, *por ejemplo* $k_1 = 1.5\sqrt{\rho_K}$ *y* $k_2 = 1.1\rho_K$ *[33], que es el escenario de la Tabla 1 de la tesis con* $\zeta = \rho_K$. *Entonces toda solución que permanezca en* K *para* $t \geqslant T_0$ *(esto se asume: aquí no se construye un conjunto positivamente invariante* K*) alcanza* $s = \bar{\nu} = 0$ *en tiempo finito* T_s, *y después* $(e, \varepsilon, \nu) \to 0$ *de forma exponencial.*

Demostración. De $\dot{e} = \varepsilon$ y $\dot{\varepsilon} = \bar{\tau}$ se obtiene $\dot{s} = \bar{\tau} + k_0 \varepsilon = -k_1 \lceil s \rfloor^{1/2} + \nu + k_0 \varepsilon$, y $\dot{\bar{\nu}} = \dot{\nu} + k_0 \dot{\varepsilon} = -k_2 \lceil s \rfloor^0 + k_0 \bar{\tau}$. Sea $\delta(t) := k_0 \bar{\tau}(t)$ a lo largo de la solución. Dado que la solución permanece en K, $|\delta(t)| \leqslant \rho_K$. El par $(s, \bar{\nu})$ es, por lo tanto, un algoritmo super-twisting cuya segunda ecuación lleva una perturbación medible acotada por ρ_K (equivalentemente, la perturbación $\rho = k_0 \varepsilon$ en la primera ecuación, cuya derivada $\dot{\rho} = \delta$ está acotada por ρ_K). Las condiciones de ganancia citadas son suficientes para la convergencia en tiempo finito de $(s, \bar{\nu})$ a 0 para toda perturbación de este tipo. Esto da $T_s < \infty$ con $s = \bar{\nu} = 0$ para $t \geqslant T_s$. Ahí, $\nu = -k_0 \varepsilon$ y $\bar{\tau} = \nu - k_1 \lceil 0 \rfloor^{1/2} = -k_0 \varepsilon$, por lo que $\dot{\varepsilon} = -k_0 \varepsilon$. Además $s = 0$ da $\varepsilon = -k_0 e$ y, por lo tanto, $\dot{e} = -k_0 e$. Por consiguiente, e, ε, ν decaen como $e^{-k_0 (t - T_s)}$. La dinámica deslizante es UEE, y $|k_0 \bar{\tau}| = k_0^2 |\varepsilon|$ decrece, por lo que la cota por ρ_K sigue siendo válida. □

Observación B.2. La Proposición B.3 es un resultado regional (semi-global), y es condicional a que la solución permanezca en K. Las ganancias deben aumentarse con el tamaño de K a través de ρ_K. Al añadir el término faltante, $\bar{\tau} = \nu - k_1 \lceil s \rfloor^{1/2} - k_0 \varepsilon$, se obtiene $\dot{s} = -k_1 \lceil s \rfloor^{1/2} + \nu$ y $\dot{\nu} = -k_2 \lceil s \rfloor^0$. Este es el ST estándar sin perturbaciones, que es globalmente estable en tiempo finito para $k_1, k_2 > 0$ [44]. Entonces $s = 0$ da $\dot{e} = -k_0 e$, y el resultado se vuelve global. El controlador (14), tal como está implementado, carece de este término.

B.6 RESULTADO PRINCIPAL

Teorema 1 (reformulado y corregido)**.** *Bajo A1–A5, con los controles (9)–(11),* (24), (25) *y cualquier controlador de orientación a)–e), con ganancias que satisfacen las condiciones de las Proposiciones B.1–B.3 y de las referencias allí citadas (para b) también bajo la hipótesis de la Proposición B.3 de que las soluciones permanecen en* K*), los errores* $(\boldsymbol{e}_\xi, \boldsymbol{\varepsilon}_\xi, \boldsymbol{e}_\eta, \boldsymbol{\varepsilon}_\eta)$ *de cada agente convergen a cero. Los errores de posición convergen exponencialmente. Los errores de orientación convergen en tiempo finito para c–e y exponencialmente para a, b. En consecuencia, los seguidores alcanzan el patrón* $\boldsymbol{\xi}_{1j} - \boldsymbol{\xi}_{1n} = C_{n,j}$ *y el líder sigue* $\boldsymbol{\xi}_d$.

Demostración. (i) Compensación exacta. Por el Lema B.2, para $t \geqslant T_0$ el lazo es (27). Por A5 el estado en T_0 es finito. El subsistema de orientación $(\boldsymbol{e}_\eta, \varepsilon_\eta)$ no depende de los estados de posición (Sección B.3).

(ii) Cascada. Para c–e, la Proposición B.2 da un $T_1 \geqslant T_0$ finito, que depende del estado en T_0, con $\boldsymbol{e}_\eta = \varepsilon_\eta \equiv 0$ para $t \geqslant T_1$. Por el Lema B.3, $\boldsymbol{w}_\xi \equiv 0$ en $[T_1, \infty)$. Por (28), $\chi_q(T_1)$ está acotado, por lo que $\|\chi_q(t)\| \leqslant \kappa e^{-\lambda(t-T_1)}\|\chi_q(T_1)\|$ (UEE). Para a, b, existen $c, \mu > 0$ con $\|\boldsymbol{e}_\eta(t)\| \leqslant c e^{-\mu(t-T_0)}$ (Proposición B.2a), y para b la Proposición B.3, donde la fase de tiempo finito antes de T_s solo añade un transitorio acotado). Al insertar esto en la fórmula de variación de constantes de la Proposición B.1,

$$\|\chi_q(t)\| \leqslant \kappa e^{-\lambda(t-T_0)}\|\chi_q(T_0)\| + \kappa L_g \bar{u}\, c \int_{T_0}^{t} e^{-\lambda(t-s)} e^{-\mu(s-T_0)}\, ds,$$

y $\int_0^\tau e^{-\lambda(\tau-s)}e^{-\mu s}\,ds \leqslant \tau e^{-\min(\lambda,\mu)\tau} \leqslant (e\delta)^{-1} e^{-(\min(\lambda,\mu)-\delta)\tau}$ para cualquier $\delta \in (0, \min(\lambda, \mu))$. Por lo tanto, $\chi_q \to 0$ de forma exponencial. La misma conclusión se sigue del lema de cascada para sistemas ISS [39, Lema 4.7]. Así, $\boldsymbol{e}_\xi, \varepsilon_\xi \to 0$ para cada agente, y $\varepsilon_\eta \to 0$ forma parte del resultado de orientación.

(iii) Formación. Para un seguidor j, $\boldsymbol{e}_{\xi j} = \xi_{1j} - \xi_{1n} - C_{n,j} \to 0$ da el patrón geométrico, y para el líder $\boldsymbol{e}_{\xi n} \to 0$ da $\xi_{1n} \to \xi_d$. En el grafo en estrella cada seguidor depende únicamente del líder, a través de las señales acotadas $\xi_{1n}, \xi_{2n}, \ddot{\xi}_n, \psi_n$ (A4), y el líder no depende de ningún seguidor. Con la prealimentación exacta (25) el sistema de error de cada agente es el analizado en las Proposiciones B.1–B.3, el cual no contiene los estados de otros agentes. Por lo tanto, no existen lazos de interconexión, y la convergencia de toda la formación se sigue agente por agente. □

B.7 LO QUE NO SE DEMUESTRA

Lo siguiente queda fuera de este análisis: la implementación en tiempo discreto, los retrasos de comunicación y la pérdida de paquetes (Crazyradio), la saturación de los actuadores más allá de A3 (incluido el efecto de saturar $\bar{v}_z$ sobre el análisis de posición lineal), y la aproximación de $\ddot{\eta}_d$. Para esta última, solo se siguen cotas últimas de tipo ISS a partir de la Proposición B.2f) cuando el residuo está acotado. A4 supone la acotación de las señales $\ddot{\eta}_d$ a lo largo del lazo cerrado, y esto no se demuestra. Las condiciones de ganancia para c–e se toman de los trabajos citados y no se verifican para las ganancias utilizadas en los experimentos.

BIBLIOGRAFÍA

[1] K. McGuire, C. de Wagter, K. Tuyls, and H. Kappen, "Minimal navigation solution for a swarm of tiny flying robots to explore an unknown environment," *Science Robotics*, vol. 4, no. 35, 2019.

[2] D. Kingston, R. W. Beard, and R. S. Holt, "Decentralized perimeter surveillance using a team of uavs," *IEEE Transactions on Robotics*, vol. 24, no. 6, pp. 1394–1404, 2008.

[3] M. Senanayake, I. Senthooran, J. C. Barca, H. Chung, J. Kamruzzaman, and M. Murshed, "Search and tracking algorithms for swarms of robots: A survey," *Robotics and Autonomous Systems*, vol. 75, pp. 422–434, 2016.

[4] D. Albani, J. IJsselmuiden, R. Haken, and V. Trianni, "Monitoring and mapping with robot swarms for agricultural applications," in *2017 14th IEEE International Conference on Advanced Video and Signal Based Surveillance (AVSS)*, pp. 1–6, IEEE, 2017.

[5] I. Maza, K. Kondak, M. Bernard, and A. Ollero, "Multi-uav cooperation and control for load transportation and deployment," in *Selected papers from the 2nd International Symposium on UAVs, Reno, Nevada, USA June 8–10, 2009*, pp. 417–449, Springer, 2009.

[6] L. R. G. Carrillo, A. E. D. López, R. Lozano, and C. Pégard, *Quad Rotorcraft Control*. Advances in Industrial Control, Springer London, 2013.

[7] J. A. Preiss, W. Hönig, G. S. Sukhatme, and N. Ayanian, "Crazyswarm: A large nano-quadcopter swarm," in *IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, pp. 3299–3304, 2017.

[8] C. Katt, H. Castañeda, and P. Castillo, "Formation-containment for a mav fleet under perturbations via adaptive sliding mode approach," in *2021 International Conference on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS)*, pp. 1530–1537, 2021.

[9] O. Mechali, L. Xu, and X. Xie, "Formation flight control of networked-delayed quadrotors for cooperative slung load transportation," in *2022 IEEE International Conference on Mechatronics and Automation (ICMA)*, pp. 526–531, 2022.

[10] A. Ramezani Dooraki and D.-J. Lee, "An innovative bio-inspired flight controller for quad-rotor drones: Quad-rotor drone learning to fly using reinforcement learning," *Robotics and Autonomous Systems*, vol. 135, p. 103671, 2021.

[11] D. Yan, W. Zhang, H. Chen, and J. Shi, "Robust control strategy for multi-uavs system using mpc combined with kalman-consensus filter and disturbance observer," *ISA Transactions*, vol. 135, pp. 35–51, 2023.

[12] J. A. Vazquez Trejo, M. Adam-Medina, C. D. Garcia-Beltran, G. V. G. Ramírez, B. y. l. Zapata, E.-M. Sanchez-Coronado, and D. Theilliol, "Robust formation control based on leader-following consensus in multi-agent systems with faults in the information exchange: Application in a fleet of unmanned aerial vehicles," *IEEE Access*, vol. 9, pp. 104940–104949, 2021.

[13] B. M. Silva, J. Y. Ishihara, and E. S. Tognetti, "Lmi-based consensus of linear multi-agent systems by reduced-order dynamic output feedback," *ISA Transactions*, vol. 129, pp. 121–129, 2022.

[14] Y.-H. Su, P. Bhowmick, and A. Lanzon, "A robust adaptive formation control methodology for networked multi-uav systems with applications to cooperative payload transportation," *Control Engineering Practice*, vol. 138, p. 105608, 2023.

[15] M. Sharma and S. Sundaram, "A geometric control approach for multi-uav cooperative payload transfer," *Nonlinear Dynamics*, vol. 111, no. 11, pp. 10077–10096, 2023.

[16] J. González-Sierra, H. Ríos, and A. Dzul, "Leader-follower robust formation control for quad-rotors via continuous sliding-modes," in *2017 International Conference on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS)*, pp. 1850–1857, 2017.

[17] S. Aldarmini, A. Vedyakov, and M. Kakanov, "Formation control for multi-agent system with disturbances compensation," *IFAC-PapersOnLine*, vol. 55, no. 13, pp. 222–227, 2022. 9th IFAC Conference on Networked Systems NECSYS 2022.

[18] S. Ma and X. Zong, "Multi-uav cooperative formation flight control system for cascade active disturbance rejection control," in *2021 3rd International Conference on Electrical Engineering and Control Technologies (CEECT)*, pp. 93–97, 2021.

[19] J. Zhang, J. Yan, B. Xiao, P. Zhang, G. Yang, and M. Lv, "Multi-uav formation controller design with uncertain dynamics," in *2019 Chinese Control Conference (CCC)*, pp. 4286–4290, 2019.

[20] L. Chen and H. Duan, "Collision-free formation-containment control for a group of uavs with unknown disturbances," *Aerospace Science and Technology*, vol. 126, p. 107618, 2022.

[21] L. F. C. Ccari and P. R. Yanyachi, "A novel neural network-based robust adaptive formation control for cooperative transport of a payload using two underactuated quadcopters," *IEEE Access*, vol. 11, pp. 36015–36028, 2023.

[22] Z. Xu, S. Xiong, Y. Lu, and L. Jiang, "Robust tracking control of uav formation with directed network time delay," in *2022 China Automation Congress (CAC)*, pp. 5508–5512, 2022.

[23] J. González-Sierra, H. Ríos, and A. Dzul, "Quad-rotor robust time-varying formation control: a continuous sliding-mode control approach," *International Journal of Control*, vol. 93, no. 7, pp. 1659–1676, 2020.

[24] H. Ríos, R. Falcón, O. A. González, and A. Dzul, "Continuous sliding-mode control strategies for quadrotor robust tracking: Real-time application," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 66, no. 2, pp. 1264–1272, 2019.

[25] A. LEVANT, "Sliding order and sliding accuracy in sliding mode control," *International Journal of Control*, vol. 58, no. 6, pp. 1247–1263, 1993.

[26] V. Torres-González, T. Sanchez, L. M. Fridman, and J. A. Moreno, "Design of continuous twisting algorithm," *Automatica*, vol. 80, pp. 119–126, 2017.

[27] L. Fridman, J. A. Moreno, B. Bandyopadhyay, S. Kamal, and A. Chalanga, "Continuous nested algorithms: The fifth generation of sliding mode controllers," *Recent advances in sliding modes: From control to intelligent mechatronics*, pp. 5–35, 2015.

[28] S. Kamal, J. A. Moreno, A. Chalanga, B. Bandyopadhyay, and L. M. Fridman, "Continuous terminal sliding-mode controller," *Automatica*, vol. 69, pp. 308–314, 2016.

[29] H. K. Khalil, *Nonlinear control*, vol. 406. Pearson New York, 2015.

[30] A. Polyakov, "Nonlinear feedback design for fixed-time stabilization of linear control systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 57, no. 8, pp. 2106–2110, 2011.

[31] E. Bernuau, A. Polyakov, D. Efimov, and W. Perruquetti, "Verification of iss, iiss and ioss properties applying weighted homogeneity," *Systems & Control Letters*, vol. 62, no. 12, pp. 1159–1167, 2013.

[32] W. Ren and R. W. Beard, *Distributed consensus in multi-vehicle cooperative control*, vol. 27. Springer, 2008.

[33] R. Seeber and M. Horn, "Stability proof for a well-established super-twisting parameter setting," *Automatica*, vol. 84, pp. 241–243, 2017.

[34] J. Förster, "System identification of the crazyflie 2.0 nano quadrocopter," bachelor thesis, ETH Zurich, Zurich, 2015-08.

[35] W. Hönig and N. Ayanian, *Flying Multiple UAVs Using ROS*, pp. 83–118. Springer International Publishing, 2017.

[36] "OptiTrack Documentation." https://docs.optitrack.com/.

[37] "Ros | an open-source robot operating system." https://www.ros.org/.

[38] E. D. Sontag, "Smooth stabilization implies coprime factorization," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 34, no. 4, pp. 435–443, 1989.

[39] H. K. Khalil, *Nonlinear Systems*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 3rd ed., 2002.

[40] S. P. Bhat and D. S. Bernstein, "Finite-time stability of continuous autonomous systems," *SIAM Journal on Control and Optimization*, vol. 38, no. 3, pp. 751–766, 2000.

[41] E. Bernuau, D. Efimov, W. Perruquetti, and A. Polyakov, "On homogeneity and its application in sliding mode control," *Journal of the Franklin Institute*, vol. 351, no. 4, pp. 1866–1901, 2014.

[42] H. Ríos, J. González-Sierra, and A. Dzul, "Robust tracking output-control for a quad-rotor: A continuous sliding-mode approach," *Journal of the Franklin Institute*, vol. 354, no. 15, pp. 6672–6691, 2017.

[43] A. Levant, "Higher-order sliding modes, differentiation and output-feedback control," *International Journal of Control*, vol. 76, no. 9–10, pp. 924–941, 2003.

[44] J. A. Moreno and M. Osorio, "Strict Lyapunov functions for the super-twisting algorithm," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 57, no. 4, pp. 1035–1040, 2012.

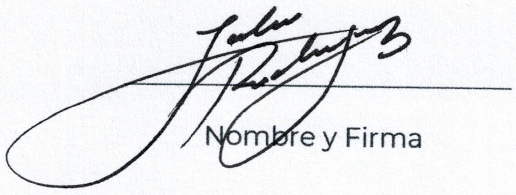
DECLARACIÓN DE AUTORÍA Y ORIGINALIDAD DE LA TESIS

Yo, Julio César Rodríguez Cervantes, en condición de egresado(a) del Programa de Posgrado: Maestría en Ciencias en Ingeniería Eléctrica del Instituto Tecnológico de La Laguna, dejo constancia que he elaborado la tesis que lleva por título: Validación experimental de controladores Multi-agentes tipo Quad-Rotor .

Declaro que en el presente trabajo de tesis no existe plagio ni copia de ninguna naturaleza, en especial de otro documento de investigación (tesis, revista, texto, congreso, o similar) presentado por cualquier institución académica, de investigación, profesional o similar.

Dejo constancia que las citas de otros autores han sido debidamente identificadas e incluidas en el trabajo de investigación, por lo que no he tomado como propias las opiniones vertidas por terceros, ya sea de fuentes encontradas en medios escritos, digitales o de internet.

Asimismo, ratifico que estoy plenamente consciente de todo el contenido de la tesis y asumo la responsabilidad de cualquier error u omisión en el documento y soy consciente de las connotaciones éticas y legales involucradas.



Nombre y Firma